KIEGÉSZÍTŐ ÚTMUTATÓ

az Oktatási Hivatal által kidolgozott, Útmutató a pedagógusok minősítési rendszerében a Pedagógus I. és Pedagógus II. fokozatba lépéshez c. dokumentumhoz

Matematika

A kiadvány elektronikus formában a www.oktatas.hu weboldalon kerül közzétételre.

OKTATÁSI HIVATAL

Tartalomjegyzék

Bevezető

A matematika tantárgy kiegészítő útmutatójának célja, hogy segítséget nyújtson a pedagógusoknak elkészíteni e-portfóliójukat, és a – nem matematika szakos – minősítési szakértőket informálja e tantárgy tanításának sajátosságairól.

A kiegészítő útmutatóban foglalt elméleti (elemzések, értelmezések és magyarázatok) és gyakorlati (minták, szempontrendszerek, példák) leírások támogatni kívánják a pedagógusokat és a pedagógusminősítési szakértőket a minősítővizsgára és a minősítési eljárásra való felkészülésben. A *matematika kiegészítő útmutatóban* az e-portfólió készítői segítséget kapnak az általános Útmutatónak a matematika tanítására jellemző, speciális értelmezéséhez.

Az útmutató olyan mintadokumentumokat tartalmaz, amelyek a gyakorlati tapasztalatokból indulnak ki és figyelembe veszik a tantárgy tanulásának és tanításának speciális szükségleteit. A szabadon választott dokumentumok listája példákat és ajánlásokat tartalmaz, amelyeknek elsődleges célja a gondolatébresztő, ötletadó segítségnyújtás. A példaként felsorolt dokumentumok egyrészt az általános Útmutató által javasolt kötelező és szabadon választható dokumentumainak szakspecifikus értelmezései és adaptálásai, másrészt olyan, fontosnak ítélt lehetőségek, amelyek segíthetik a pedagógusokat a napi munkájuk során. A minták hathatós segítséget kívánnak nyújtani a kollégáknak saját nevelő-tanító munkájuk tudatos elemzéséhez. Kérjük, ügyeljen arra, hogy a portfólió tükrözze az Ön személyiségét, ugyanakkor szakmai munkájának egészét is bemutassa!

A csoportprofil látszólag nem szakspecifikus dokumentum, mégis fontosnak tartottuk, hogy bemutassuk: a matematikatanár más szemmel látja a diákokat, mint más tárgyat tanító kollégája, hiszen a megfigyelés elsődleges szempontja annak a speciális, absztrakt gondolkodásnak a szintje, amely a tárgy elsajátításához nélkülözhetetlen, továbbá ez a tárgy az együttműködés magas fokát kívánja: az egymástól tanulás képességének szintje meghatározza a közös munkát.

Olyan mintadokumentumra is talál példát, amely a diákok kutatómunkára való felkészítésének folyamatát mutatja be egy impozáns anyagban. Ez a dokumentum a Mesterpedagógus vagy Kutatótanár fokozatra pályázók számára ad példát, segítséget a dokumentumválasztáshoz és a napi munkához egyaránt.

A szakmai életút bemutatásánál a pedagógus nyíltan, „szerénység nélkül" írhat mindarról, amit pályája során eddig elért, amire büszke.

A kutatómunkáról szóló beszámoló igazi csemege: egyrészt kedvet kaphat tőle minden kolléga arra, hogy szabadon választott dokumentumai közé valóban egyedi anyagot töltsön fel, másrészt az anyag mind szakmai, mind módszertani szempontból figyelemreméltó, és a matematikát tanítók körében érdeklődésre tarthat számot.

Az indikátorok a pedagóguskompetenciákat tevékenységekben értelmezik, és példákat adnak arra, hogy a nevelő-oktató munkában hogyan ragadhatók meg, illetve az e-portfólióban hogyan dokumentálható a 8 pedagóguskompetencia megléte.

Felhívjuk figyelmét arra, hogy a kiegészítő útmutatók nem tartalmazzák azokat az információkat, példákat, magyarázatokat, amelyek valamennyi tárgy tanítása/nevelési feladatának megoldása esetében azonosak vagy hasonlóak. Ezért kérjük, hogy e-portfóliója elkészítésekor a kiegészítő útmutatóval együtt az általános Útmutatót is használja!

Indikátorértelmezések

1. kompetencia Szakmai feladatok, szaktudományos, szaktárgyi, tantervi tudás			
Szaktárgyi KKK-k:"– Eredeti matematikai látás- és gondolkodásmóddal rendelkezik, amely a megszerzett tudás alkalmazásában és az oktatásban való hasznosíthatóságában, valamint a speciális matematikai problémamegoldó technikák felhasználhatóságában is jelentkezik. Képes az oktatás során ezen problémamegoldó technikák átadására (a tanulók életkori sajátosságaihoz, absztrakciós képességeihez és tudásszintjéhez igazodva). Rendelkezik azokkal az ismeretekkel, amelyek lehetővé teszik, hogy szaktárgyának új eredményeit megismerhesse, értelmezhesse. Ismeri a matematika alapvető kutatási módszertanát. Képes – elsősorban a természettudományokon belül – a különböző szakterületek tudás- és ismeretanyaga közötti összefüggések felismerésére, integrációjára. Ismeri a matematika társadalomban betöltött szerepét, a matematika tanításának célját, a tanulók személyiség- és gondolkodásfejlődésében játszott szerepét. Ismeri a szaktárgy tanulási sajátosságait, megismerési módszereit, fontosabb tanítási és tanulási stratégiáit. Képes a matematika témakörében szakszerűen kifejezni magát mind szóban, mind írásban. Képes a matematika tudományterületén a fogalmak, elméletek és tények közötti összefüggések megteremtésére, közvetítésére. Képes a matematikában elsajátított elméleti ismeretek gyakorlati alkalmazására, ennek közvetítésére a tanulók felé. Szaktudományos és szakmódszertani felkészültségét kritikusan szemléli, azzal kapcsolatban önreflexióra képes. Elkötelezett a tanulók matematikai ismereteinek, képességeinek fejlesztése iránt. Meg tudja ítélni a matematikának a köznevelésben betöltött szerepét. Tisztában van azzal, hogy a matematika által közvetített tudás, kialakított kompetenciák más műveltségterületen is hatnak, és ezt ki tudja használni a tanulók kompetenciáinak, személyiségének fejlesztésében."			
Indikátorok		**Szakterületi/szakspecifikus példák**	
		A portfólió alapján	**Az óralátogatás alapján**
1.1.	Pedagógiai tevékenysége biztos szaktudományi tudást tükröz.	Tematikus terveiből és óraterveiből látható, hogy a tanítandó anyagot pontosan el tudja helyezni a témakör, ill. a tantárgy egészében, ismeri és tanítványaival is megismerteti a matematikai tudás alkalmazhatóságát változatos területeken, a matematikában és más tudományokban	A szöveges feladatok valósak, életszerűek, pl. a százalékszámításnál banki kamatok, áremelkedések, árleszállítások kiszámítása törlesztőjáradék kiszámítása, a mértékegység átváltásnál valós épületek, területek adatai stb. Pl.: a számelmélet tanítása során a prímek kapcsán szót ejt a titkosírásról is. Pitagorasz-tétel – geometriai számítások a mindennapi életből.

1.2.	Ismeri az intézményében folyó pedagógiai munka tartalmi meghatározására és szervezésére vonatkozóan alkalmazott, a Kormány és az oktatásért felelős miniszter által kiadott tantervi szabályozó dokumentumokat és az intézménye pedagógiai programjának a saját szakterületére vonatkozó főbb tartalmait.	Pontosan ismeri a tantervet, a tanítandó anyag helyét, előzményeit és következményeit a tantervben. Mindez nyomon követhető tematikus terveiből, óraterveiből.	Az óra szervezése, a választott témakör és módszerek megfelelnek a dokumentumokban megfogalmazott elvárásoknak. (Követelmények, taneszközök, stb.)
1.3.	Ismeri és tudatosan felhasználja szakterülete, tantárgya kapcsolatait más műveltségterületekkel, tantárgyakkal.	Belső kapcsolódás: más, eddig már tanult matematika anyag előhozása, utalás a hasonló és az eltérő tulajdonságokra. Belső matematikai kapcsolat esetén a hasonlóság okainak nyomatékosítása.(Pl.: függvények és geometriai transzformációk kapcsolata, adott tulajdonságú pontok keresése és a szerkesztések kapcsolata, oszthatóság és halmazok stb.) Külső kapcsolódási lehetőség: más tantárgyból –főleg természettudományos tárgyból– meglévő hasonló fogalom vizsgálata, annak hasonló és eltérő tulajdonságai alapján. (Pl.: a vektor fogalma a matematikában és a fizikában, szimmetria a matematikában és az építészetben, verselésben, betűkifejezések átrendezésének gyakoroltatása fizikai és kémiai képletekben, statisztikai adatok értelmezése, elemzése.)	A szimmetriákhoz kapcsolható példákat,képeket, testeket hoz az órára. Mérlegelv tanításánál ténylegesen mérleget visz az órára. A fizika vagy kémia könyvből is visz példákat mozgásos és keveréses szöveges feladatokhoz. Pl.: geometria és koordináta-geometria kapcsolata. Pl.: érintő szerkeszthetősége – az érintő egyenlete. Fizikai vektor és matematikai vektor fogalma (hasonlóság, különbség). Fizikai mozgások és a függvények (értelmezés, ábrázolás).
1.4.	Ismeri és tudatosan alkalmazza a szakterülete, tantárgya sajátosságaihoz igazodó megismerési folyamatokat, nevelési, tanítási módszereket, eszközöket.	.Pontosan tudja, hogy a tanítandó anyag milyen módszerrel tanítható hatásosan (Páros munka, projektmódszer, frontális munka, műveletekhez adósság-vagyon modell, geom.transzformációkhoz másolópapíros applikáció, egyenletek kezdeti tanításához mérleg súlyokkal stb.). A tananyag elsajátítása szempontjából hatékony szemléltető- és tanulói kísérleti eszközök (pl. Babylon építő, lego, stb.) használatát építi be óráiba a szükséges mennyiségben (nem több, nem kevesebb), helyesen tervezve az eszközhasználatra fordítandó időt.	Szöveges feladatok megoldása 5-6. osztályban inkább rajzzal, próbálkozással, míg 7-8. osztályban algebrai összefüggések felírásával egyenletekkel történhet. Nagyobb témakört, mint pl. az egybevágósági szerkesztések, előre egészben megtervez és úgy tanít. Ha a témakör megkívánja szemléltet, illetve lehetőséget ad a gyerekeknek önálló próbálkozásra különféle eszközökkel.

1.5.	Ismeri a szakterülete, tantárgya szempontjából fontos információforrásokat, azok pedagógiai felhasználásának lehetőségeit, megbízhatóságát, etikus alkalmazását.	Ismeri a gyerekek rendelkezésére álló eszközöket – könyvet, feladatgyűjteményt, példatárat, ezeket használja. Több hasonló ilyen közül hatékonyság alapján szelektál. Maga is használ digitális anyagokat, ha a tananyag azt szükségessé teszi, s ez a forma a leghatékonyabb (számítógép, interaktív tábla, multimédia lehetőségei).A tanítás során többféle eszközt használ (feladat-adatbázisok) és erre a tanulók figyelmét is felhívja. Utal az ezek közül mértékadókra. (Pl.: felhívja a figyelmet a használható feladat-adatbázisokra, internetes portálokra, statisztikai adatok elemzésére. szerkesztőprogramokra,) pl. Geogebra, Drive program A pedagógusnak legyenek széles körű ismeretei a létező és használható szoftverekről, ismerje ezek használatának jogszabályi előírásait t is.	Valószínűség tanítása során nagyszámú eset előállításához számítógépes segítséget vesz igénybe. Függvénytranszformációk tanításához segíthet a Derive program. Statisztika tanítása során írott, vagy internetes sajtóban megjelenő statisztikákat elemeztet, és felhívja a figyelmet a manipulásás veszélyére.
1.6.	Fogalomhasználata szakszerű, az adott pedagógiai helyzethez igazodó.	-Ismeri a matematikai fogalmakat,azok pontos elnevezését. Tisztában van azzal, hogy a tanterv szerint ezek közül melyik használata indokolt, azokat következetesen és egyértelműen használja. Ezen túlmutató esetekben a tanulók igényeihez alkalmazkodik. Törekszik a pontos, a korosztálynak megfelelő matematikai szóhasználatra. Tisztában van a fogalomalkotás folyamatával, és következetesen alkalmazkodik ehhez.	-Geometriában pontosan és következetesen használja a pont – egyenes – szakasz fogalmakat, téglalap – téglatest között különbséget tesz. Szükséges, elégséges feltételek pontos értelmezése. Emelt szinten: folytonosság, differenciálhatóság fogalmának pontos használata. Pontosan és szakszerűen beszél, de tartózkodik a nagyon hosszú, bonyolult, több új fogalmat és elnevezést tartalmazó mondatokban történő magyarázattól.

2. kompetencia: Pedagógiai folyamatok, tevékenységek tervezése és a megvalósításukhoz kapcsolódó önreflexiók

Szaktárgyi KKK-k "– Ismeri a matematika tanításához kapcsolódó jogszabályi hátteret, tanterveket, vizsgakövetelményeket, a tananyag-kiválasztás és – rendszerezés szempontjait. Képes meghatározni a szaktárgyában tanítandó tartalmakat, azokat megfelelő logikai struktúrába rendezni. Képes a matematika tanulása-tanítása során felhasználható nyomtatott és digitális tankönyvek, taneszközök, egyéb tanulási források kritikus elemezésére és a konkrét célokhoz illeszkedő kiválasztására (különös tekintettel az info-kommunikációs technológiára). – Kollektív munkában történő helyi tanterv készítése, önálló éves tematikus (tanmeneti) tervezés, óravázlat készítése, valamint az oktatástechnikai eszközök használata."

Indikátorok		Szakterületi/szakspecifikus példák	
		A portfólió alapján	Az óralátogatás alapján
2.1.	Tervei készítése során figyelembe veszi az intézménye vonatkozásában alkalmazott tantervi, tartalmi és az intézményi belső elvárásokat, valamint az általa nevelt, oktatott egyének és csoportok fejlesztési céljait.	Ismeri az intézmény pedagógiai programjának matematikára vonatkozó részét, a tantervi előírásokat, elvárásokat. Az osztály/csoport képesség szerinti megoszlását figyelembe véve határozza meg a témakörök tanításának céljait, az órák részcéljait figyelembe véve a tantervi előírásokat (tehetséggondozás, felzárkóztatás). Képes az osztály irányultságát is figyelembe venni.	Erősebb osztályban nehezebb feladatokat ad, gyengébbeknél egyszerűbbeket. Gyakorláshoz különböző nehézségi szintű feladatsorokat, vagy fokozatosan nehezedő feladatsort készít.
2.2.	Egységes rendszerbe illesztve tervezi az adott pedagógiai céloknak megfelelő stratégiát, folyamatot, munkaformát, módszereket, eszközöket.	Saját maga számára jól használható tematikus tervet, óraterveket készít, vagy ilyennel rendelkezik, s azt az aktuális csoporthoz igazítja. Felhasználhatja a különböző tankönyvcsaládokhoz kifejlesztett, pedagógiailag jól végiggondolt tanmeneteket is, hiszen azok pontosan alkalmazkodnak az adott könyvhöz. Óratervei folyamatos építkezést tükröznek.	Az órai feladatok igazodnak az óratervben előzetesen tervezett feladatokhoz, az előzetes tervtől indokolt esetben el tud térni anélkül, hogy az óra tervezett logikai rendszerét felborítaná. Az óra szervesen kapcsolódik a megelőző, azonos témájú órához, és előkészíti a téma következő óráját.

2.3.	Pedagógiai fejlesztési terveiben kiemelt szerepet kap a gyermekek, tanulók tevékenységeinek fejlesztése	Legfőbb rendezési elv: a tanulók életkori sajátosságainak megfelelő tanítás. Csak az ennek megfelelő módszer lehet hatékony. Ezért bevonja a tanulókat az új ismeret megszerzésébe. (v.ö. Varga Tamás erre vonatkozó munkái). Az órán használt taneszközök mindegyike tudatos tervezést igényel, pontosan tudni kell, miért pont azt használta.(Pl.: az egyenletek tanításának elején kell a mérleg-modell, végig kell játszani, később elég hivatkozni rá. Geometria transzformációk tanítása során kezdetben kell a másolópapíros segítség, ez később már elhagyható).A tantervet figyelembe véve olyan mélységig tanítja a matematikát, amit a tanulók érdeklődése, előzetes tudása lehetővé tesz. Ha van igény, nehezebb matematikai problémákat is megbeszél. Ha nincs ilyen igény vagy tudásalap, akkor megelégszik a tantervi követelménnyel, azt nem feltétlenül bővíti tovább.	Számelméletből gyengébb csoportban az alapokat tanítja, tehetségesebbeknek beszél még megoldatlan sejtésekről a prímek körében. Szakközépiskolai csoportban az adott szakmához kapcsolódó feladatok közül választ. A tanulók absztrakciós képességeihez igazítva alakítsa ki az órán az elmélet-gyakorlat arányát, minél több tanulónak minél nagyobb időtartamban biztosítsa az önálló problémamegoldás lehetőségét differenciált feladatsorokkal, eszközökkel.
2.4.	Tervező tevékenységében épít a szociális tanulásban rejlő lehetőségekre.	Feladatok elkészítése csoportokban. Tudatos csoportépítést igényel, figyelve az egyéni eltérésekre. Mindenkinek legyen feladata a csoporton belül, ami neki megfelelő. Lehetőleg olyan problémát adjon, amely alkalmas a munkamegosztásra, elég összetett ahhoz, hogy különböző képességű és tudású tanulók együttműködjenek benne. Használjon ilyen szemléletű feladatgyűjteményeket (projektmódszer alkalmazására).A tanulás folyamatában a tanulók egyéni tevékenységére épít. Mindig legyen megfelelő feladat a számukra, s azt mindig kísérje kiértékelés, megbeszélés, tapasztalat leszűrése.	Csoportmunkát szervez: pl. valószínűségszámítással kapcsolatos órán kísérletek végzésére. Gyakorlásnál a feladatokat csoportosan végzik, értékelik. Frontális munka esetén is az új elméleti ismereteket lehetőség szerint önállóan megoldandó rávezető feladatokkal vezeti be, amely feladatok tanulságait a tanulók elemzik, egymást kiegészítve, javítva. Kerüli a tanári előadás, tanári feladatmegoldás túlsúlyát.

2.5.	A gyermekek, tanulók optimális fejlődését elősegítő, az egyéni fejlődési sajátosságokhoz igazodó, differenciált tanítási-tanulási folyamatot tervez.	Csak olyan taneszközt használ, amit meg tud indokolni, ami nélkül nehezebb vagy lehetetlen lenne a tanulás. A módszer igazodik a tanár és a tanulók személyiségéhez is. (Nem szerencsés, ha a demonstrációs céllal bemutatott pl. számítógépes applikációhoz a tanár látványosan nem ért). Különféle módszereket és eszközöket ismer és használ ugyanazon téma tanítása esetén. A matematika magas absztrakciós szintjének elérését apróbb lépésekre bontja a nehezebben absztraháló számára. Olyan apróbb feladatokat ad, amelyek megkönnyítik a tanuló számára az elsajátítást. Az alkalmazott módszer kiválasztásában arra törekszik, hogy az a lehető leghatékonyabb legyen. Ezen eszközök órai felhasználását mindig a célzottság és az eredményesség kell, hogy vezérelje. Kerülni kell az öncélú használatot! (Ez eszköz csupán!)	A könnyebb feladatoktól a nehezebbek felé kis lépésekben haladva nem hagy ki logikai lépéseket. Pl.Geometriai szerkesztéseknél:a gyengébbek megszerkesztik egy adott alakzat középpontos képét, ügyesebbek középpontos tükrözéssel megoldható szerkesztéseken törik a fejüket, míg a legjobbak diszkutálják is a feladatot. A kevésbé ügyesek kiszámítják egy algebrai kifejezés értékét, ügyesebbek értelmezhetőséget vizsgálnak. Mindenki tudjon prímtényezőkre bontani, az ügyesebbek lássák a kapcsolatot a prímtényezős felbontás és az osztók száma között. Kevésbé érdeklődő diákokat akár jobb osztályzattal, kis ötössel is lehet motiválni.
2.6.	Terveiben szerepet kap a gyermekek, tanulók motiválása, motivációjuk fejlesztése.	A tantervi minimumon túl nehezebb feladatokat ad azoknak, aki azt igénylik. Megteremti ezt az igényt, felkelti az érdeklődést, vagy beszámítja az értékelésbe. Észreveszi a lemaradókat, számukra könnyebb, önbizalomerősítő feladatokat keres. Az erőviszonyok tisztázása mellett mindenki dolgozzon az órán!A tanulás folyamatában a tanulók egyéni tevékenységére épít. Mindig legyen megfelelő feladat a számukra, s azt mindig kísérje kiértékelés, megbeszélés. A matematika iránt érdeklődőknek matematikai vonatkozású, az anyaghoz tartozó érdekességeket keres. Minden tanulónak olyan feladatot ad, amely kihívást jelent számára, de meglévő tudásával megoldható. Kerülendő a csak a tanár által megoldható, a matematikától elriasztó feladat. Beszél olyan kérdésekről is, amik még nem megoldottak a matematikában (sejtések, megoldatlan kérdések). Nagyon fontos, hogy a matematika iránt kevésbé fogékony tanulók számára is találjon motivációs szándékkal feladatokat, amikkel kedvet teremt számukra is a matematikai munkához.	Figyel arra, hogy mindenki dolgozzon az órán, legyen mindenki számára megfelelő feladat. Az órán sok tanulónak lehetősége van megnyilvánulni: egyéni feladatmegoldás bemutatásával, ötlettel, mások ötletének kivitelezésével (számolás, algebrai átalakítás, szerkesztés), képességeihez, előzetes tudásához,. munkatempójához igazított feladatokkal. (Tengelyes tükrözés tanításához nagyon jó a másolópapír, valódi tükröt is bevihetünk az órára. Motiválni lehet pl. azzal is, ha koordinátarendszerben végzett tükrözéseknél érdekes alakú alakzatokat tűzünk ki. Pl.: függvények tanítása előbb alapszinten történik, egyszerűbb esetekben, majd lehet számítógéppel rajzoltatni, elemezni.) A házi feladat is lehetőleg differenciált; fokozatosan nehezedő feladatsorból, álljon, amely minden tanuló számára kihívás, és egyben a sikerélmény lehetősége. A gyengébb, de szorgalmas tanulók, illetve a matematika iránt érdeklődők számára kitűnő motivációs lehetőség a kiselőadás egy-egy kiemelkedő matematikusról (ókori görögök, a két Bolyai), vagy a matematika más területeken történő alkalmazásából (aranymetszés a zenében, képzőművészetben, a természet világában)

			Minden feladatot valamilyen módon megbeszélnek. Minden pozitív megnyilvánulás pozitív visszaigazolást kap.
2.7.	Tervező tevékenysége során a tanulási folyamatba illeszti a foglalkozáson, a tanórán kívüli ismeret- és tapasztalatszerzési lehetőségeket	Tematikus terveiben, óraterveiben helyet kapnak az elektronikusan, vagy/és könyv formában létező, a gyerekek számára is hozzáférhető példatárak, programok alkalmazásával felépített órák, projektek. A gazdasági matematika elemeit (banki műveletek, statisztikaelemzés, stb.), a matematika felhasználását az élet különböző területein (művészetek, politika) beépíti terveibe.	Csoportmunkát szervez: pl. valószínűségszámítással kapcsolatos órán kísérletek végzésére. Gyakorlásnál a feladatokat csoportosan végzik, értékelik. Bevezető, illetve gyakorló órái változatosak: számológép és számítógép segítségével elvégezhető, illetve megoldható feladatokat ad, és megmutatja a gyerekeknek az eszközök használatát, felhívja a figyelmüket a felhasználhatóság változatosságára, a fellelhető digitális anyagokra, felületekre, programokra. A gyerekek részéről az órán érkező, a matematikához kapcsolódó, "hétköznapi életükből hozott" kérdésekre minden esetben, a gyerekek tudászintjének megfelelő mélységben válaszol, az ilyen aktivitást értékeli, jutalmazza.
2.8.	Megtervezi a gyermekek, a tanulók és nevelt, oktatott csoportok értékelésének módszereit, eszközeit.	Értékelési módszereit (szóbeli értékelés, feleltetés, különféle dolgozatformák, projektek...) következetesen, rendszeresen alkalmazza, - a szóbeli spontán értékelést kivéve – beépíti tematikus tervébe, óraterveibe. A részösszefoglaló és témazáró dolgozatokhoz feladatlapokat tervez, amelyek a leggyengébbektől a legjobbakig minden tanuló számára tartalmaznak sikerrel megoldható feladatokat. A gyengébb képességű, de szorgalmas diákok érdekében a témazáró dolgozatban helyet kaphatnak közösen, vagy házi feladatként már megoldott, megbeszélt feladatok is. Elkerülendők, a tervekben nem szereplő, "fegyelmezési céllal, büntetésből" íratott dolgozatok.	A gyerekek ismerjék a különböző értékelési módszereket, mindig legyen lehetőségük felkészülni az írásbeli vagy szóbeli számonkérésre. legyen természetes a számukra, hogy minden órai megnyilvánulásukat értékelik; az értékelés mindenkor a megerősítés, jobbítás szándékát tükrözze, ösztönözzön órai aktivitásra, a téves gondolat jó elemei is mindenkor kapjanak elismerést. Legyen természetes a gyerekek számára a társak tudásának elismerése, a hibák, tévedések tapintatos és tényszerű korrigálása.

2.9.	A gyermekek, a tanulók fejlettségére is figyelemmel bevonja őket a nevelés-oktatás és a tanulás-tanítás tervezésébe.	A haladás ütemét, az értékelés formáit és eszközeit lehetőség szerint a csoport specifikus jellemzőit figyelembe véve tervezze. Időről-időre a gyerekek visszajelzéseit figyelembe véve vizsgálja fölül, és ha szükséges, korrigálja terveit. Ezt a folyamatot (felülvizsgálás, korrigálás) rögzítse a tervekhez fűzött reflexióiban.	Az órákon figyeljen a gyerekek reflexióira, (túl gyors, túl lassú az óra menete, nehezen követhető, elkalandoznak közben, kevésnek-soknak bizonyul az önálló munka, sok kérdés vetődik fel az órán, stb..) és szükség esetén korrigálja előzetes terveit. "Elsősorban a gyereket tanítsa a tananyagra, és ne a tananyagot erőltesse a gyerekbe". Nem ragaszkodik minden áron az előre eltervezetthez. Képes alkalmazkodni a pillanatnyi helyzethez: pl. nem jött elő az a megoldás, amit a pedagógus szeretett volna, vagy a gyerekek sokkal fáradtabbak, mint gondolta, esetleg egy lépésben megértették azt, amit több lépésben, hosszasabban tervezett. Ilyen esetben gyorsít vagy lassít. Összeszokott pedagógus-gyerekcsoport kapcsolatban direkt módon is bevonhatók a gyerekek a tervezésbe (részösszefoglaló dolgozat, témazáró dolgozat írásának időpontja, a gyakorlófeladatok mennyisége, ellenőrzésének módja, stb.)

<table>
<tr><th colspan="4">3. kompetencia: A tanulás támogatása</th></tr>
<tr><td colspan="4">Szaktárgyi KKK-k:"– Ismeri a matematika megértéséhez és kreatív alkalmazásához szükséges gondolkodásmód kialakulásában/kialakításában szerepet játszó pszichológiai tényezőket. Tisztában van a szóbeli és írásbeli kifejezőkészség alapvető tanulás-módszertani jellegzetességeivel, hibáival.
– Képes a motivációt, tanulói aktivitást biztosító, a tanulók gondolkodási, problémamegoldási és együttműködési képességeinek fejlesztését segítő módszerek megválasztására, alkalmazására. Képes a matematika ismeretanyagának megfelelő csoportosításával, közvetítésével az érdeklődés és a figyelem folyamatos fenntartására. Képes a matematika speciális összefüggéseivel, fogalmaival kapcsolatos megértési nehézségek kezelésére.
– Felkészült az info-kommunikációs eszközöknek a tanítási-tanulási folyamat során történő, a tanulók életkori sajátosságainak és a tananyag tartalmának megfelelő alkalmazására.
– Felkészültség a tények és értékelések közötti különbségek, az összefüggések önálló felismertetésére.
– Felkészültség a matematika tanulásában kiemelkedő eredményeket elérő tanulók motiválására, segítésére, a tehetséggondozásra, valamint ösztönzés az informatikai ismereteknek a matematikatanulása során való felhasználására.
– Rendelkezik az egész életen át tartó tanulásképességével, valamint ezen képesség és a megfelelő attitűd tanulókban történő megalapozásának, kialakításának képességével."</td></tr>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Indikátorok</th><th colspan="2">Szakterületi/szakspecifikus példák</th></tr>
<tr><th>A portfólió alapján</th><th>Az óralátogatás alapján</th></tr>
<tr><td>3.1.</td><td>A tanulás támogatása során épít a gyermekek, tanulók egyéni céljaira és szükségleteire, a gyermek- és tanulócsoport sajátosságaira.</td><td>Tervei készítése során a gyerekcsoport jellegéhez (képességek, irányultság, a magtematika későbbi felhasználásának szükségessége és lehetősége) igazodik a feladatanyag válogatásánál. Az elméleti ismeretek tárgyalásának mélységét is a csoporthoz igazítja.</td><td>A tanulási folyamat során sokszor, ha kell minden témakör elején indokolja a tanulóknak a matematika (ezen belül az adott témakör) tanulásának szükségességét; gondolkodási képesség fejlesztése, tervszerű munka, elemzőkészség kialakítása, absztrakciós képességek fejlesztése, stb. Felhívja a tanulók figyelmét a matematika elkerülhetetlen felhasználására (fizikából, kémiából, általában a természettudományos tárgyakból, illetve a csoport más, jellegéből fakadó alkalmazásaira). Példákat hoz a mindennapi életből is. (Banki alkalmazások, technikai-műszaki felhasználás). Vektorok – fizikai felhasználás, koordinátarendszer – földrajz, százalékszámítás – banki alkalmazások.</td></tr>
</table>

3.2.	Figyelembe veszi a gyermekek, a tanulók aktuális fizikai, érzelmi állapotát.	Fáradt gyereknek ugyanarra a matematikai problémára egyszerűbb példát, könnyebb feladatot kell adni. Ugyanazt a feladatot lehet egyszerűsíteni, ha az aktuális helyzet úgy kívánja. Ezért tervezése során több nehézségi szintű, illetve többféle absztrakciós szintet igénylő feladatban is gondolkodik. Reflexióiban rögzíti, hogy mely nehézségi szintű feladatokkal dolgozott az órán, és mi indokolta a választást.	Óráin figyel a gyerekek reakcióira, és azonnal reagál azokra tervei rugalmas alkalmazásával, esetleg változtatásával. Reflexióban rögzíti a változtatás, választás tényét és okát.
3.3.	Felkelti és fenntartja a gyermekek, a tanulók érdeklődését.	A témaköröket lehetőség szerint matematikai, matematikatörténeti érdekességekkel vezeti be, illetve ezeket beépíti a tematikus terve megfelelő pontjaihoz. A módszerek és eszközök váltogatásával, digitális anyagok beemelésével, a tanulói önálló próbálkozó, kísérletező munka lehetőségének megteremtésével él tervedzése során.	Óráin - lehetőség szerint - valamennyi tanuló lehetőséget kap arra, hogy egy-egy feladatot, vagy feladatelemet önállóan kidolgozzon, és ezért szóbeli, vagy metakommunikációs megerősítést kapjon. Sorversenyek, "láncfeladatok" (egymásnak adnak feladatokat, és az éppen a táblánál dolgozó, vagy megszólaló szólítja fel a következő tanulót), csoportban végzett feladatok (pl. geometriai test építése, tükrös alakzatok rajzolása és kivágása) tehetik érdekessé és változatossá a valamely művelet elvégzésében rutinszerzést célzó órákat.
3.4.	Nyugodt és biztonságos nevelési, tanulási környezetet teremt.	A nyugodt és biztonságos nevelési környezet alapja a kiszámíthatóság, a tervszerű munka, a megfelelően választott munkatempó, a célok tudatosítása és szem előtt tartása a folyamat végéig. A csoportprofil körültekintő feltárása,a csoporthoz igazított tematikus tervek és óratervek lehetővé teszik a kiszámítható, minden helyzetre adekvát megoldást kínáló munkát. A reflexiók segítenek abban, hogy egy későbbi hasonló helyzetekre hasonló módon tudjon reagálni a pedagógus.	A tanárnak gondja van arra, hogy mindenki jól lássa a feladatok megoldásának színterét (táblát, kivetítőt, monitort), különben a tanuló elveszti érdeklődését, csak nehezen követi és nem alakítja az órát. Ehhez az is hozzátartozik, hogy áttekinthetően ír a táblára. Az órához szükséges taneszközök –pl. szerkesztési eszközök, táblázatok, könyvek– meglétét szigorúan megköveteli, az esetleg rászorulóknak igyekszik biztosítani azokat. A számológép, és - középiskolában - a függvénytáblázat használatának biztos ismerete biztonságot ad. Átgondoltan tervezi az ülésrendet. Figyel a rosszabbul látókra, hallókra, a szórt figyelműekre, a mozgásigényüket nehezen kontrollálókra.

3.5.	Feltárja és szakszerűen kezeli a tanulási folyamat során tapasztalt megértési nehézségeket	A szükséges ismeretszint eléréséhez kis feladatelemekből álló, gondolatonként építkező feladatsorokat tervez, amely feladatsorok lehetőséget adnak több szint átugrására is, a matematikából jobb képességű tanulók számára. Reflexióiban elemzi a csoportban tapasztalt megértési problémákat (mely lépések okoztak többeknek, vagy egy-egy gyereknek nehézséget, mit kell újra elmagyarázni, gyakoroltatni, más oldalról közelíteni, stb.) Ilyen probléma pl. középiskolában a polinomok szorzattá alakítása és a szorzatok polinom alakja felismerésének rutinná fejlesztése. Felismeri az olvasási problémákat, mert azok lehetetlenné teszik a feladatok megértését. Előfordulhat, hogy a diszkalkulia felismerése is a matematika tanárra vár, mert a tanító nem tudta felismerni azt. Ilyen esetekben jobban jár, ha szakember segítségének igénybevételét javasolja a diáknak. Az enyhébb esetekben a programozott oktatás lépéseit felhasználva igyekszik a hátrányokat csökkenteni.	Figyel a "középre tanítás"-ból lefele vagy felfele kilógó diákokra. A jobb képességűeknek külön feladatokat készít, illetve felhívja a figyelmüket az önálló ismeretszerzés eszközeire, szakkörökbe, versenyekre irányítja őket, és figyelemmel kíséri fejlődésüket. A lefele kilógók esetében az osztálytársi segítségtől a csoportos korrepetáláson át az egyéni tanári korrepetálásig terjedő lehetőségek közül választ. Óráin tapintatosan segíti, és soha nem szégyeníti meg a lemaradót.
3.6.	Ösztönzi a gyermekeket, a tanulókat a hagyományos és az info-kommunikációs eszközök célszerű, kritikus, etikus használatára a tanulás folyamatában.	Használ digitális példatárakat, programokat (Derive, szerkesztőprogramok, geogebra, stb.), ismeri és használja a különböző példatárakat, tudja azok digitális formában történő letöltési lehetőségeit (érettségi sorok, KÖMAL, ABACUS, stb.). Ezeket a szükséges és elégséges mennyiségben használja tanítása tervezése során. "Gyűjteményét" folyamatosan bővíti, rendszeresen használja, az egyes anyagok elérésében, használatuk jogszabályi előírásaival tisztában van.	Az óráin használt feladatanyag forrásáról tájékoztatja a diákokat, felhívja a figyelmüket az általa legjobbnak ítélt példatárakra, programokra, és minden esetben felhívja a figyelmet az Internetről való letöltés jogszabályi előírásaira. A digitálisan fellelhető anyagok kritikus szemléletét példákkal alakítja ki (pl. a Wikipédián pontatlanul, vagy hibásan szereplő definíció, vagy állítás bemutatásával.) Felhívja a figyelmet, és konkrét példával illusztrálja a nyomtatott anyagokban előforduló hibákat. (A példatárban közölt megoldás, végeredmény is lehet hibás)

3.7.	Fejleszti a gyermekek, a tanulók tanulási képességeit.	Tisztában van azzal, hogy a matematika tanítás elsődlegesen nem öncélú (valamennyi matematikai ismeret közvetlen alkalmazásának elsajátíttatását célozza), hanem a logikus gondolkodás képességének kialakítására és fejlesztésére, a bizonyítási igény felkeltésére, és az állítások bizonyítási folyamatának megtanítására szolgál. Ennek tudatában különös figyelmet fordít a problémamegoldás Polya György féle felépítésének megismertetésére, rutinná fejlesztésére. Egyforma fontosságúként kezeli a tanári közlés alapján, és az egyéni tanulás útján szerzett tudást, és módszereit, eszközeit ennek tudatában válogatja és váltogatja.	A matematikai problémák megoldásához szükséges elméleti ismeretek megértésével azonos súlyt helyez a kivitelezés pontosságára és teljességére. Tanítja, gyakoroltatja a problémamegoldás lépéseit. (A probléma megértése, matematikai szimbólumokkal és jelekkel történő leírása, a matematikai probléma megoldása a tanult eszközökkel, a feltételek teljesülésének és a megoldás jóságának ellenőrzése, válasz a feladatban feltett kérdésre) Racionális számokkal végzett műveletek során pl. tetten érhetők a matematikai tanulási problémák. amelyekre minden esetben adekvát megoldást kell keresni. Az órán a tanár igyekszik különbséget tenni a nem tanuló és a tanulni nem tudó diák között.
3.8.	Az önálló tanuláshoz szakszerű útmutatást és megfelelő tanulási eszközöket biztosít	Az IKT-eszközök –a zsebszámológéptől a televízióig, a mobiltelefontól a személyi számítógépig– mind megtalálhatók a diákoknál. Olyan feladatokat kell az órára vinni, amelyek célzottan ezen eszközök használatát igénylik. Sok helyütt táblázatok használata helyett előnyben lehet részesíti a számológépet, esetleg a személyi számítógépet,hogy azok használatát elsajátítsák, gyakorolják. Az eszközhasználat tervezésekor elsősorban a helyi lehetőségeket kell figyelembe venni, de a pedagógus akkor is használjon minden rendelkezésére álló eszközt a feladatanyag és a módszerek válogatásához, ha a gyerekek számára nem minden adott.	A gyerekek számára elérhető eszközökről (számológép, számítógép) és anyagokról (programok), azok használatának megtanításával tájékoztatja a gyerekeket, kellő időt, illetve lehetőséget biztosítva a tanári kontroll melletti kipróbálásra. Pl. Statisztikai feladatoknál számológép segítségét veszi igénybe. Az interneten fellelhető feladatbankok használatára ösztönöz, megjelölve azokat, melyek tapasztalatai szerint jók. Olyan mennyiségben és csak akkor használja órán ezeket az eszközöket, amennyi az időkeretbe belefér, és amennyi az óra céljának megvalósítását nem veszélyezteti. (Néha a kevesebb többet ér)
3.9.	A gyermekek, a tanulók hibázásait, tévesztéseit a tanulási folyamat szerves részeinek tekinti és a megértést elősegítő módon reagál rájuk.	Tematikus terveiben, óraterveiben csak annyi feldolgozandó anyagot, feladatot tervez, amennyi kényelmesen belefér az időkeretbe, beleszámítva a gyerekek kérdésire, tévedéseik korrigálására, többféle megoldási út bemutatására fordítandó időt is. A reflexióban kitér az órán elhangzott, vagy a gyerekek munkájában felfedezett tipikus és atipikus hibákra, és azok későbbi elkerülésének, vagy gyakorisága csökkentésének módjára.	Az órán nem kapkod, minden olyan tanulói megnyilvánulásnak helyt ad, ami az éppen tárgyalt feladathoz, témakörhöz szorosan vagy lazán köthető, több megoldási út keresésére ösztönöz, tapintatosan felhívja a tévesztő gyerek figyelmét a hibás megoldások hibaforrására, elismeri, dicséri a jó gondolatot, ötletet, és erre ösztönzi a tanulókat is. Elvárja és értékeli, ha a gyerekek egymás szakmai megnyilvánulásaira szakszerűen, tapintatosan, építően reagálnak. Olyan légkört alakít ki, amelyben kérdezni, az óra menetében aktívan, de fegyelmezetten részt venni érdem. A tanár előzetes tervét felülírhatja egy-egy, diák kezdeményezte más út, szakmailag indokolt kitérő.

3.10.	Támogatja a gyerekek, a tanulók önálló gondolkodását, elismeri, és a tanítás-tanulási folyamat részévé teszi kezdeményezéseiket, ötleteiket.	Az órai feladatok mellett a házi feladatokat is úgy állítja össze, hogy azokban - lehetőség szerint - az ismeretek begyakorlásán kívül, amely mindenki számára kötelező, lehetőség legyen "alkotómunkára" is: olyan feladatok beemelésével, amelyek az ismert gondolatokon felül igényelnek egy-két új, de a jó képességű, vagy érdeklődő gyerek számára kikövetkeztethető, felkutatható gondolatot is.	Elegendő időt biztosít az órán a gondolkodtató házi feladat megoldási kísérleteinek megbeszélésére is. Minden órán, minden anyagrész feldolgozása során lehetőséget biztosít arra, hogy a gyerekek megosszák társaikkal és a tanárral a témakörhöz, feladathoz kapcsolódó ötleteiket, következtetéseiket. Ezekre minden esetben reagálnia kell a pedagógusnak, illetve lehetőséget kell biztosítania a csoport más tagjának, hogy szakszerűen igazolja, vagy cáfolja a felvetést. A pedagógusnak rugalmasan kell alkalmazkodnia az ilyen spontán "helyzetekhez" úgy, hogy az órát megjegyzésével gazdagító gyereket és társait is motiválja a többi matematika órán való hasonló aktivitásra.

4. kompetencia: A tanuló személyiségének fejlesztése, az egyéni bánásmód érvényesülése, a hátrányos helyzetű, sajátos nevelési igényű vagy beilleszkedési, tanulási, magatartási nehézséggel küzdő gyermek, tanuló többi gyermekkel, tanulóval együtt történő sikeres neveléséhez, oktatásához szükséges megfelelő módszertani felkészültség

Szaktárgyi KKK-k: "– Tudja, hogy a matematika milyen szerepet játszik a tanulók személyiség fejlődésében. Ismeri a matematikában megjelenő fogalmak kialakulásának életkori sajátosságait. Ismeri a matematika tanítása során fejlesztendő kompetenciákat.
Fejlett fogalmi gondolkodással és absztrakciós képességgel rendelkezik, amely képessé teszi őt az oktatás során a matematikai fogalmak precíz kialakítására (a tanulók életkori sajátosságaihoz, absztrakciós képességeihez és tudásszintjéhez igazodva).
– Tanítványait racionális gondolkodásra, érvelésre neveli.
– Képes a matematika speciális összefüggéseivel, fogalmaival kapcsolatos megértési nehézségek kezelésére. Képes arra, hogy a tanulók tanítására, képességeik fejlesztésére megválasztott módszereket a tanuló adottságainak és előzetes ismereteinek megfelelően válassza meg.
– Rendelkezik a matematika iránti megfelelő attitűd kialakítani tudásának képességével, beleértve a tanulók önálló gondolkodásának kifejlesztését.
– Képes az átlagtól eltérő – tehetséges vagy sajtos nevelési igényű – tanulók felismerésére, differenciált bánásmód kialakítására.
– Ezen belül rendelkezik a tanulók speciális matematikai képességei korai felismerésének képességével, amelynek kihasználásával a tehetséges tanulókat ösztönzi a megoldandó problémák megértése és megoldása területén eredeti ötletek felvetésére; járatos a tehetséggondozáshoz szükséges ismeretekben, módszerekben és technikákban; továbbá a matematika tanulásához gyenge képességekkel rendelkező tanulókkal való foglalkozás módszertani eszköztárában.
– Tudatos értékközvetítés vállalása. A tanulók önálló véleményalkotásának ösztönzése, kritikus gondolkodásmód kialakítása. Érzékeny a tanulók problémáira."

Indikátorok		Szakterületi/szakspecifikus példák	
		A portfólió alapján	Az óralátogatás alapján
4.1.	A nevelés-oktatás folyamatában a gyermekek, a tanulók értelmi, érzelmi, szociális és testi sajátosságaira egyaránt kiemelt figyelmet fordít.	A pedagógus által készített csoportprofilból a gyerekek sokoldalú (értelmi, érzelmi, szociális) ismerete tükröződik, különös tekintettel a csoport együttműködése szempontjából fontos tulajdonságokra, és a matematika eredményes tanításához nélkülözhetetlen ismeretekre. A tematikus terv felépítése, és az óratervek e tulajdonságokra épülve tartalmazzák az alkalmazott módszereket és eszközöket. (A képességek, és a matematikához fűződő érzelmi viszony határozzák meg a feladatsorok nehézségi szintjét, illetve a szemléltetés, tanulói kísérletezés mértékét, az egyéni ismeretszerzéshez vezető utak választását is.)	A csoport összetételétől függetlenül kiemelt figyelmet fordít a rendszerességre, pontos munkavégzésre nevelésre, a következetességre, az elfogadásra, tapintatra nevelésre, és ezekben az óráin maga is példát mutat. Szükség esetén az óráira érvényes ülésrenddel veszi figyelembe a gyerekek testi adottságait (látás, hallás, magasság, koncentrációs képesség, stb.) A tananyag feldolgozása során választott módszerekkel és eszközökkel, a differenciált feladatsorokkal, érdekes háttérismeretek közlésével, szemléltetéssel, tanulói gyakorlatok szervezésével alkalmazkodik a matematikai képességekhez, és erősíti a matematikához való pozitív érzelmi viszonyulást.
4.2.	Tudatosan teremt olyan pedagógiai helyzeteket, amelyek segítik a gyermekek, a tanulók komplex személyiségfejlődését.	A matematika tanulási folyamata figyelemkoncentrációra, belső fegyelemre, türelemre, a gondolkodás minden helyzetben való szükségességére, a gyakorlás, egyéni erőfeszítés elkerülhetetlenségének felismerésére nevel. Az órák sorában nagyobb arányban kell szerepelnie a változatos módszerekkel, eszközökkel történő tudásmélyítésnek, gyakorlásnak, mint a tanári ismeretközlésnek. (páros munka, órai versenyek, amelyek hol a rutinszerzést segítve gyorsaságra, hol a fegyelmezettséget erősítő precizitásra, hol a több megoldási módot kereső gondolkodásra épülnek, bizonyos témaköröknél projektek, amelyek az együttműködési készséget erősítik, pl. a matematika adott területének alkalmazása más tudományokban, vagy a művészetben, gazdasági életben.)	Vannak, akik a matematikai probléma felvetésében, vannak, akik a megoldás módjának kidolgozásában, s vannak, akik a pontos számolásban jeleskednek. Mindegyiket dicsérni, erősíteni kell, rá kell mutatnia a pedagógusnak a problémamegoldásban elfoglalt helyére. Pl. összetett szöveges feladatok megoldásánál minden gyerek a neki legjobban menő részt mondja el a táblánál. Koordináta-geometriai feladatnál a probléma elvi megoldása után a konkrét alakzat egyenletének felírása azoknak is megy, akik az elején megrémültek a feladattól. A feladatok ilyen jellegű megosztása az elfogadást, az egymástól tanulás képességét is fejleszti. A pedagógus hozzáállása, türelme, tudatos személyiségfejlesztő, minden jó megnyilvánulásnak és a fejlődés érzékelésének örülni tudó attitűdje, amely a gyerekekre is átragad, a cél elérésének kulcsa.

4.3.	Tiszteletben tartja a gyermekek, a tanulók személyiségét, tudatosan keresi a bennük rejlő értékeket, a gyermekekhez, a tanulókhoz felelősen és elfogadóan viszonyul	A csoportprofil, az órák tervezésének változatossága, a személyre, kisebb csoportokra tervezett feladatok válogatásának módja, az órák utáni reflexiók tartalma árulkodik arról, hogy a pedagógus számára mennyire fontos az egyes gyerekekben rejlő értékek feltárása, és új értékek teremtése. A feleletek, dolgozatok értékelésében lehetősége van a pedagógusnak összehasonlítani azokat az előzőkkel, rámutatni a fejlődésre vagy annak hiányára. A kis előrelépést is fel lehet mutatni, mert jelentősen javíthatja a tanulók munkakedvét. A dolgozatértékelő órák tervezése mutatja, hogy a pedagógus a személyiségfejlesztés eszközeként, vagy csupán jegyszerzésre használja a dolgozatot.	A gyerekek minden megnyilvánulására reagál, reflexiói tényszerűek, a hibákra tapintatosan, a javítás szándékával mutat rá. Kitér egy tanuló feleletének elemzése során a tanulásában elért eredményekre. Az osztályzatok mögöttes tartalmát, az elvárásokat világosan, pontosan, megismerteti a tanulókkal a közös munka kezdetén, és az értékelés során ragaszkodik ehhez. Az osztályzatok nemcsak a pillanatnyi tananyag tudást veszik figyelembe, hanem a tudáshoz vezető utat is: a szorgalom, a kitartás emelheti a gyengébb jegyet, a szorgalom hiánya esetén a tudás hiányossága a jegyben is markánsabban tükröződik.
4.4.	Megismerteti a gyermekekkel, a tanulókkal az érintett korosztályra a tantervi, tartalmi szabályozókban meghatározott egyetemes emberi, európai és nemzeti értékeket és azok tiszteletére neveli őket.	Az értékek ismerete, őrzése és tisztelete nem jelenik meg tételesen a matematika tanításához készült dokumentumokban. Ez olyan attitűdje a pedagógusnak, amely egész tevékenységéből, minden megnyilvánulásából látszik, komplex személyiségének része. Értékteremtő mivolta kiolvasható reflexióiból, és minden olyan dokumentumból, amelyben valamely egyetemes értékhez való viszonyát érinti. (Pl. az elfogadás, a másik ember személyiségének tisztelete, a hagyományok tisztelete és ápolása)	A pedagógus minden órai megnyilvánulása az értékrendjét tükrözi. (Türelem, elfogadás, segítőkészség, a szokásrend betartása és betartatása, alkalmazkodás a tantervi előírásokhoz, bizonyos helyzetekben a tananyagból kitekintő megjegyzései, az előhozott példák, stb.)
4.5.	Tudatos értékválasztásra és a saját értékrendjük kialakítására ösztönzi a gyermekeket, a tanulókat.	A pedagógus értékválasztása, saját értékrendje tükröződik dokumentumaiban. Személyiségének mértékadó volta, vagy kevéssé meghatározó jellege szintén. A matematika tanításának tervezésében, szervezésében éppúgy, mint bármely más tantárgy esetében felismerhető a pedagógus személyisége, értékrendje.	Az órákon helye és szerepe van a vitának, a kulturált, érvekre épülő véleménycserének. Nemcsak szakmai kérdések körül alakulhat ki vita, hanem sok egyéb olyan helyzet adódhat, amely a gyerekeket állásfoglalásra készteti. Ilyenkor a pedagógus példamutató magatartása, határozott véleményalkotása, és sokszor (a gyerekek) véleményének elfogadása, az elkövetett hiba beismerése az adekvát viselkedés. A pedagógusnak ösztönöznie kell a gyerekek őszinte, de a pedagógussal és a társakkal szemben tiszteletttudó véleménynyilvánítását, elismerni az elvei mellett kiálló, logikusan érvelő gyerek bátorságát akkor is, ha nincs igaza.

4.6.	Tudatosan alkalmazza a gyermekek, a tanulók sokoldalú megismerését szolgáló pedagógiai-pszichológiai módszereket.	A pedagógiai-pszichológiai ismeretek meglétét mutatja, ha a pedagógus óraterveiből és a csoportprofilból kiderül, hogy különleges bánásmódot igénylő gyerekként kezeli a kiemelkedően tehetségeseket is. Nekik mindenképpen a tanterv követelményein túlmutató, nehezebb feladatokat válogat, érinthet olyan témaköröket is, amelyek a tantervben nem szerepelnek, de a problémamegoldó gondolkodást fejlesztik. Ugyancsak másfajta bánásmódot alkalmaz a részképesség-zavaros tanulók esetében. Esetükben elképzelhető, hogy bizonyos anyagrészek részben kimaradnak, helyette mások erősebb hangsúlyt kapnak egyéni fejlesztési terv alapján.(Pl.: súlyos mozgáskoordinációs problémákkal küzdő gyerektől felesleges pontos és gondos szerkesztéseket várnunk, helyette erősíthetjük a koordináta-geometriát)	Az órán a tehetségesebbeknek külön feladatot ad, a lemaradókat segítő feladatra is gondol. Az óra folyamán az általánosnál több figyelmet fordít (megnézi a füzetét, az egyéni munka során csendben visszakérdez egy előzőleg elhangzott gondolatra, metakommunikációs eszközzel élve magára vonja a gyerek figyelmét, stb.) a koncentrációs zavarral küzdő gyerekre, észreveszi, ha a lassúbb diák lemaradt, és igyekszik segíteni a felzárkóztatásában. Az órán minden gyerek megkapja azt a figyelmet, amire szüksége van a továbbhaladáshoz. Ez csak akkor lehetséges, ha a pedagógus sokoldalúan ismeri tanítványait.
4.7.	Felismeri a gyermekek, a tanulók személyiségfejlődési – és az esetleg jelentkező tanulási nehézségeit - s képes számukra hatékony segítséget nyújtani, vagy szükség esetén más szakembertől segítséget kérni.	A személyiségfejlődési nehézségek kezelése csak összefogással lehetséges. A matematika tanár a gyerek irányába mutatott megértő, segítőkész magatartásával tud segíteni. A csoportprofilban, és a tematikus tervhez, óratervekhez írt reflexiókban tudja bemutatni, hogy minden órán külön figyelmet fordít a segítségre szoruló gyerekre. A tanulási nehézséggel küzdő gyerek köré - amennyiben a matematika megértése, tanulása, vagy az is okozza a problémát - segítő "hálózatot" tud szervezni a társakból és önmagából. Erről a tevékenységéről a csoportprofil és a reflexiók árulkodnak.	Óráin a pedagógus türelemmel, megértéssel, folyamatos odafigyeléssel é gyakori pozitív, megerősítő visszacsatolással, a csoport szolidaritásának felébresztésével és táplálásával tud segíteni. Óravezetéséből kiderült, hogy van-e a csoporton belül feladatmegosztás, és ha van, van-e helye benne a nehéz helyzetben lévő gyereknek.

4.8.	Felismeri a gyermekekben, a tanulókban a tehetség ígéretét, és tudatosan segíti annak kibontakozását.	A matematikai tehetség csírái fiatal korban felismerhetők, jelei az átlagosnál gyorsabb gondolkodás, problémalátás, az absztrakcióra való átlagon felüli képesség. Külön feladatok tervezése a tehetségfejlesztés útja. Azok a feladatsorok fejlesztőek, amelyek nem a rutinfeladatok számának növelésével akarják lekötni a gyerek figyelmét, hanem olyan feladatokkal, amelyek egy vagy több gondolati művelettel többet várnak el, mint amennyit közösen feldolgoztak, begyakoroltak, amely helyt ad a gyerek önálló felfedező, alkotó munkájának. Az sem jó, ha a tehetséges gyereket "előre tanulásra" ösztönözzük. Nem a lineáris építkezés, vagy a feladatmennyiség növelése a célravezető, hanem a tanulás mélysége. A versenyfeladatok gyűjteményei nyomtatott és digitális formában egyaránt kiváló segítséget jelenthetnek a pedagógusnak.	Az órákon a kiemelkedően tehetséges gyerek nagymértékben elősegíti az új anyag feldolgozását, amennyiben kellően fegyelmezett, türelmes, és hajlandó együttműködni a pedagógussal. A gyakorló órákon külön feladatsor kidolgozása számára a legnagyobb segítség. Témazáró dolgozatokban jó, ha van olyan feladat, amely a tehetséges gyereket gondolkodásra készteti, de a megoldás lehetősége mindenki számára fennáll. Az ilyen feladat megoldása még a jeles osztályzatnak sem lehet feltétele: ezért külön - a csoport és a tanár megállapodása alapján meghatározott - jutalom jár. A pedagógus felelőssége is, hogy a tehetséges, így sikeres és sokat szereplő gyerek ne kerüljön a csoport peremére, ne vívjon ki ellenszenvet a kevésbé tehetségesek részéről.
4.9.	Az együttnevelés keretei között is módot talál a gyermekek, a tanulók esetében az egyéni fejlődés lehetőségeinek megteremtésére.	Az együttnevelés keretei között differenciált feladatsorokkal, és személyre szabott értékeléssel, esetleg a rászoruló gyereknek eszközök biztosításával (pl. laptop) lehet segíteni a kibontakozását. A dolgozatokra, számonkérésre készülve (ennek nyoma van a portfólió dokumentumai között) a pedagógusnak úgy kell összeállítania a dolgozat anyagát, hogy az minden gyerek tudását mérje, és minden gyereknek lehetőséget biztosítson a sikeres munkára.	A differenciált feladatsorok mellett a személyre szóló odafigyelés, a munkáltató jellegű órák túlsúlya, ezen belül a tanulói megnyilvánulási lehetőségek nagy száma és a gyakori visszajelzés biztosítja az egyéni fejlődést.

<table>
<tr><th colspan="4">5. kompetencia: A tanulói csoportok, közösségek alakulásának segítése, fejlesztése, esélyteremtés, nyitottság a különböző társadalmi-kulturális sokféleségre, integrációs tevékenység, osztályfőnöki tevékenység</th></tr>
<tr><td colspan="4">Szaktárgyi KKK-k: "Felkészültség matematikai tanulmányi versenyek, táborok tervezésére, szervezésére, kivitelezésére. Felkészültség a matematika kiegészítő ismereteit közvetítő matematika szakkör és önképzőkör, szaktanterem működtetésére."</td></tr>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Indikátorok</th><th colspan="2">Szakterületi/szakspecifikus példák</th></tr>
<tr><th>A portfólió alapján</th><th>Az óralátogatás alapján</th></tr>
<tr><td>5.1.</td><td>A pedagógus az általa vezetett, fejlesztett gyermek- és tanulócsoportok fejlesztését a közösségfejlesztés folyamatának ismeretére, és a csoportok tagjainak egyéni és csoportos szükségleteire, sajátosságaira alapozza.</td><td>A pedagógus által készített csoportprofilból, és az erre alapozott tematikus terv és óratervek felépítéséből, valamint az óratervek végrehajtásának elemzéséből (reflexiók) következtethető ki, hogy a pedagógus mennyire ismeri a csoportot, épít-e a csoportban rejlő értékekre, illetve arra, hogy a közösségfejlődés során esetlegesen jelentkező órai konfliktusokat észreveszi-e, tudatosítja-e, és hogyan tud, vagy próbál úrrá lenni a rendkívüli helyzeten.</td><td>A pedagógus az órán észreveszi, ha a közösség valamilyen okból, megoldatlan konfliktushelyzet következtében feszült állapotban, az együttműködésre való törekvése kudarcot vall. Akár az óra menetének néhány perces megszakításával, célzott kérdésekkel megpróbálja felderíteni a szokatlan viselkedés okát, és gyorsan felméri, hogy van-e esély a konfliktus feloldására. Ha van, megteszi azt, ha nincs, akkor - jelezve a gyerekeknek, hogy észleli a problémát - folytatja a munkát, előzetes tervét megváltoztatva, lehetőleg együttműködést nem igénylő módszereket alkalmazva. A tanóra után módot kell találnia arra, hogy a konfliktus feloldása érdekében ő, vagy egy arra kompetensebb személy (pl. osztályfőnök) segítsen a közösség belső kapcsolatrendszerének rendezésére. Egy-egy gyerek szokásostól eltérő viselkedését észleli, de az óra keretei között csak akkor bonyolódik a probléma megoldásába, ha ahhoz kellő ismerete van, és a gyerekkel való munkakapcsolata megengedi azt. Egyéb esetekben "békén hagyja" azon az órán a rossz közérzettel küzdő gyereket.</td></tr>
</table>

5.2.	Megteremti az általa irányított nevelési, oktatási folyamat során az együttműködési képességek fejlődéséhez szükséges feltételeket.	Differenciált feladatsorokkal, az együttműködést segítő anyag feldolgozási módszerek beépítésével (pármunka, csoportmunka, projektek, tanulópárok alakítása) erősíti a csoport közösségi fejlődését. Pármunkára a gyakorló feladatok alkalmasak, mivel a párok ellenőrizni tudják egymás munkáját. A csoportmunka feladatsora lehetőséget ad közös produktum létrehozására, pl. valószínűségszámításhoz, kísérletsorozat elvégzése, vagy statisztika készítése, a projektmunka célja lehet pl. szemléltető anyagok, pl. geometriai testek, matematikai fogalmakat tartalmazó tabló készítése, matematikatörténeti anyag feldolgozása és előadása 50. órán, 100. órán, iskolanapon, a tanév utolsó óráinak egyikén. A csoportalkotás elveit a reflexióban írja le.	A csoporttal való első találkozása kezdetétől természetes módon alkalmazza a tananyag feldolgozás, elmélyítés közösségi módszereit, a pármunkát, csoportmunkát, közös projektek készítését, a csoport előtt elhangzó gondolatok (állítások és indoklások) közös elemzését, értékelését, a tévedések tapintatos korrigálását. (A látogatott órán, amennyiben ilyen módszert alkalmaz a pedagógus, észrevehető, hogy egyedi alkalom, vagy a csoportban folyó munka szerves része.) A gyerekeket meg kell tanítani egymás elfogadására, az egymástól tanulás lehetőségének megbecsülésére. A pedagógus személyes példája irányadó ebben. Egy konkrét példa: Lehetőség szerint kiemeli az egyébként perifériára szorulni látszó gyerek jó megoldását.
5.3.	Szakszerűen és eredményesen alkalmazza a konfliktusok megelőzésének és kezelésének módszereit.	Pedagógiai repertoárjában szerepelnek a konfliktuskezelés változatos módszerei. Ezek meglétére a dokumentumokhoz fűzött reflexióból lehet következtetni, amennyiben az órán rendkívüli esemény történik, és ennek elemzését írja le a pedagógus. Az "esetleírás", mint szabadon választott dokumentum szintén bizonyíthatja a pedagógusnak ezt a szándékát és képességét.	A pedagógusnak fel kell ismernie az óráján tapasztalható lappangó feszültséget és konfliktushelyzetet is. Ha az órán bizalomkeltő, őszinte légkör uralkodik, vélhető, hogy a pedagógus képes feltárni a konfliktusok okait, és segíteni tud és akar a csoportnak a harmonikus együttműködés kialakítása és fenntartása érdekében. (Egy tanórai csoport nem feltétlenül baráti közösség. A munkában való együttműködés, és az egymással szembeni elfogadó magatartás az elvárható.)

5.4.	Ösztönzi a gyermekek, a tanulók közötti véleménycserét, fejleszti kommunikációs képességeiket, fejleszti a tanulókban az érvelési kultúrát.	A pedagógusnak ez a törekvése és képessége leginkább az órán mutatkozik meg, dokumentumokból nehezen tetten érhető	A véleménycsere ösztönzésére kiválóan alkalmasak olyan kérdések, amelyre a válasz "biztos-nem biztos, de lehet - lehetetlen" válaszhármas valamelyike. Bármelyik válasz indoklást igényel. Az órán elhangzó dialógusokból, egymás megszólalására adott reflektálásokból látható, hogy a véleménycsere, a korrekt és konkrét, tárgyszerű vita természetes velejárója-e a napi munkának, az elfogadás, vagy az egymás elleni indulatok színtere-e a matematika óra. A kommunikációs képesség akkor fejlődik, ha sokszor ad lehetőséget a pedagógus szóbeli megnyilvánulásra. A matematika órán ez nem feltétlenül szóbeléi felelés (sok gyerek nem tudja átlátni a "nagy" tábla előtt állva a feladatot, izgalma bélnííthatja, vagy lelassíthatja gondolkodását). A szóbeli kommunikáció - a frontális munka során adott rövid válaszokon kívül - fejlesztésének hasznos módja lehet a házi feladat szóbeli ismertetése, vagy megtanulható anyag felelés formájában történő számonkérése (pl. geometrtiai tételek bizonyítása, definíciók, emelt szinten a matematikai analízis elemei)
5.5.	A gyermekek, a tanulók nevelése, oktatása során a közösség iránti szerepvállalást erősítő pedagógiai helyzeteket teremt.	Nem specifikusan matematika tanári, mint inkább pedagógusi felelőssé ilyen helyzetek teremtése. A matematika tanár a 9. évfolyamosok számára szervezett "Matematika határok nélkül" verseny mintájára szervezhet csoport-, osztály-, vagy évfolyamversenyt, amely kitűnő alkalom az együttműködés, közösségi szerepvállalás gyakorlására. Szintén a közösségi felelősségtudatot erősíti egy-egy sokat hiányzó gyerek felzárkóztatásának megszervezése. Ha a pedagógus élt ilyen lehetőséggel, célszerű az erről szóló dokumentumot feltölteni, illetve utalni erre a tevékenységére a csoportprofilban, vagy valamely dokumentumhoz fűzött reflexióban.	Amennyiben a pedagógus élt azzal a lehetőséggel, hogy a közösségi szerepvállalás erősítésére alkalmat teremt, meg kell tanítania a gyerekeket ennek megvalósítására, a hatékony munkamegosztásra, a vezető szerep vállalásának felelősségére, és a vezető szerephez jutott gyerekek részéről tanúsítandó viselkedésre, vezetési kultúrára..
5.6.	Pedagógiai feladatai során figyelembe veszi és értékként közvetíti a gyermekek, a tanulók és tanulóközösségek eltérő kulturális, társadalmi hátteréből adódó sajátosságokat.	A csoportprofilból kiderül, hogy a pedagógus ismeri tanítványai szociokulturális hátterét, az otthoni segítségnyújtás mértékét, és ennek megfelelőek az elvárásai és az órák céljai. Gyengébb csoportban, kisebb otthoni segítséget feltételezve inkább a tantárgyi minimum alapos begyakorlása a cél, míg ott, ahol a	A példák szövegezése alkalmas az adott környezetben a feladat pontos megértésére. A pedagógus segítő magyarázatai szükségesek és elegendők. Ez különösen akkor fontos, ha a szöveg olyan fogalmakat tartalmaz, amelyeket az ingerszegény környezetből érkező gyerek nem ismerhet. Amennyiben van a

		társadalmi háttér támogatóbb, ott van helye a kutatási feladatoknak – pl. nehezebb számelméleti feladatok, érdekességek gyűjtése, tökéletes számok, különböző prímek, megoldatlan számelméleti kérdések	csoportban eltérő kulturális környezetből érkező gyerek (egyik, vagy mindkét szülője nem magyar anyanyelvű, hosszú időt töltött külföldön, stb.) érdekes lehet olyan szöveges feladatokat gyűjtetni a gyerekkel, amelyek az ő anyanyelvi környezetében előfordulnak. (a külföldi tankönyvek érdekes feladatanyaggal gazdagíthatják a repertoárt)
5.7.	A gyermekeket, tanulókat egymás elfogadására, tiszteletére, kölcsönös támogatására, előítélet-mentességre neveli.	Amennyiben a pedagógus előítéletmentes, elfogadó, minden dokumentumából kiérződik ez az attitűdje. Főleg a csoportprofil segít e tulajdonság felismerésében.	A pedagógus elfogadó személyisége érték- és példaadó. Ez kiérződik a "nem átlagos" gyerekkel folytatott kommunikációjából, a gyerekek megnyilvánulásaira való reakcióiból, és abból, ahogyan reflektál a gyerekek egymás közötti kommunikációjára és metakommunikációjára. (Nem tűrheti a lekicsinylő, bántó kommunikációt és metakommunikációt akkor sem, ha egy-egy gyerek rendre hibázik megszólalásai során, vagy viselkedése - önhibáján kívül - pl. mert túlmozgásos, vagy figyelemzavarral küzd, irritálja a többieket.
5.8.	Pedagógiai tevékenységében a nevelt, oktatott gyermekek, tanulók életkorából következő fejlődés-lélektani jellemzőik ismerete tükröződik.	Fontos, hogy a pedagógus tematikus terve és óratervei összeállításakor a tantervi követelményeknek való megfelelés mellett kiemelt figyelmet fordítson az életkori sajátosságokra, és a módszereket, eszközöket ennek megfelelően válassza ki. (az a szemléltetés, ami egy hetedikes gyerek figyelmét leköti, a kilencedikesnek már unalmas lehet akkor is, ha a téma - pl. függvénygrafikon készítése - azonos.)	A pedagógus kommunikációja alkalmazkodjon a korosztályi sajátosságokhoz. Találja meg a középutat a szakszerűtlen, a szakkifejezéseket teljesen nélkülöző köznyelvi stílus, és az idegen szavaktól, szakkifejezésektől hemzsegő tudományoskodó beszéd között. Óráin tartson munkarendet, tartsa kézben a csoport irányítását, de legyen toleráns az életkori sajátosságokból fakadó deviáns magatartással szemben. Ne legyen indulatos, reakciója, az esetlegesen alkalmazott retorzió sohase haladja meg az "elkövetett" fegyelmezetlenség mértékét.

6. kompetencia: Pedagógiai folyamatok és a tanulók személyiségfejlődésének folyamatos értékelése, elemzése

Szaktárgyi KKK-k : "– Ismeri és alkalmazza a tudásellenőrzés, a képességmérés legkorszerűbb eredményeit,eszközeit. Tájékozott a különböző feladatbankokról és feladatgyűjteményekről, képesség ilyenek összeállítására, illetve alkalmazására. Képes a tantárgyi követelmények kidolgozására. Képes a tanulók személyre szabott, differenciált módszerekkel történő értékelésére."

Indikátorok		Szakterületi/szakspecifikus példák	
		A portfólió alapján	Az óralátogatás alapján
6.1.	A tantervi tartalmakat a gyermekek, a tanulók egyéni pedagógiai-pszichológiai szükségleteihez is igazodva eredményesen és adaptívan alkalmazza.	Tervezése során a tanított anyagrész valamennyi szintjéhez készít feladatokat, és azokat a csoport, ill. egy-egy tanuló képességét figyelembe véve dolgozza fel.Pl.: oszthatóság gyengébb csoportban csak a legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többes szintjéig, ügyesebb csoportban összetettebb oszthatósági feladatok is, tagozatos szintű csoportnál akár diofantoszi egyenletek is.	Az órán mindenkinek van megfelelő feladata, amin képességei figyelembevételével gondolkodhat.
6.2.	Változatos pedagógiai értékelési módszereket alkalmaz, a nevelési-oktatási folyamatban célzottan alkalmazza a diagnosztikus, a fejlesztő és összegző értékelési formákat.	Dokumentumai tükrözik, hogy az értékelés minden formájának jelentőségével tisztában van, és megfelelő helyzetekben alkalmazza azokat. Arra törekszik, hogy az "értékelés" fogalma a tanulók körében ne kapjon negatív megítélést, hanem a tanulási folyamat szerves része legyen. Fontos a diagnosztikus értékelés alkalmazása, amely a tanár számára ad információt a folyamat kezdetén meglévő tudásszintről. A fejlesztő értékelésnek végig kell kísérnie a tanulás folyamatát, és el kell érnie célját: a gyerekek folyamatos visszajelzést kapjanak arról, hogy hol tartanak a követelmények teljesítésében, és kapjanak segítséget a folytatáshoz. Nem szabad, hogy a szummatív értékelés kerüljön túlsúlyba, arra csak a folyamat végén, egy-egy téma lezárásakor kerüljön sor. A dokumentumokból világosan ki kell tűnnie, hogy egy-egy dolgozat milyen céllal készült. A folyamat közbeni, fejlesztő értékelés formáinak az életkori sajátosságokhoz kell igazodniuk. Pl. az életkori sajátosságokhoz igazodva a kisebb gyerekeknél inspirálóbb a szóbeli értékelés, a javítás lehetősége. De pl. a racionális számok körében végzett műveletek tekintetében kevesebb helye van a hibák elnézésének, itt az írásbeli értékelés célszerűbb.	A tudásmérési eszközei a diákok előtt ismertek (pl. ellenőrzés szóban, néhány példás röpdolgozatban, hosszabb téma közben, vagy témazáróban), "a szabályokat", pl. hogy füzetbe vagy papírlapra írják (mennyi ideig, mindenki ír-e stb.), ismerik, rutinosan alkalmazkodnak az adott ellenőrzési formához. A pedagógusnak az írásbeli munkákat értékelnie kell, ami nem azonos az osztályozással. A hibák pontos megjelölésével, pár szavas megjegyzésekkel el kell érnie, hogy a tanuló pontosan tudja, milyen értékű a tudása, és hogy tudja pótolni hiányosságait, javítani hibáit.

6.3.	Változatos, a szakterülete, a tantárgya sajátosságainak és az adott nevelési helyzetnek megfelelő ellenőrzési-értékelési módszereket használ.	A matematika tanár, a tantárgy sajátosságainak megfelelően többnyire írásbeli értékelést végez, de ennek több formáját alkalmazhatja. Fontos, hogy tematikus tervében ott szerepeljenek a fejlesztő értékelés, ahol az anyag súlypontjai azt megkívánják (pl. a tanult fogalom ismeretére épülő új fogalom bevezetése előtt). A tervtől csak akkor térhet el, ha az anyag részek tanításának sorrendjét meg kell változtatnia, vagy további részekre bontás vált szükségessé. Pl. 9. és 10. osztályban az algebra tanítása csak aprólékos, elemekre bontott építkezés útján lehetséges: az algebrai kifejezésekkel való műveletek az összevonástól a tört egyszerűsítése felé haladnak, vagy az egyenlőtlenségek tanítását meg kell előznie a függvényszemlélet alakításának.) A reflexiókból látható, hogy a pedagógus nem használta-e - helytelenül - az "értékelést" fegyelmező eszköznek.	A szóbeli értékelésnek (vagy az írásbeli munkák értékelését követő szóbeli megjegyzéseknek) tárgyszerűeknek, fejlesztő célúnak kell lenniük. Nem szégyenítheti meg a pedagógus a diákot, és nem célravezető az agyondicsérés sem, mert a társak körében az visszatetszést kelthet. A korrekt,. mértéktartó, tárgyszerű, a jót és a rosszat egyaránt tartalmazó értékelések szükségesek.
6.4.	Pedagógiai céljainak megfelelő ellenőrzési, értékelési eszközöket választ vagy készít.	A tankönyvekhez tartozó tudásszintmérő feladatlapok közül az osztály tudásszintjének ismeretében válogat. Ha ilyen feladatlap nincs vagy nem megfelelő, akkor önállóan készít ilyet, vagy módosítja a meglévőt. Az értékelést jelző osztályzatokat minden esetben ponthatárok alapján állapítja meg, a ponthatárok a gyerekek előtt ismertek, lehet egységesen, százalékban meghatározni a témazáró, illetve a fejlesztő értékelést szolgáló dolgozatok pontátváltását, de lehet témakörönként más-más az átváltás. Csak olyan házi feladatot ad, amit ellenőriznek. Az órán feladott feladat megoldását is ellenőrizni kell, ha nem az adott órán, akkor a következők valamelyikén.	Fontos ellenőrzési eszköz a házi feladat. Minden órára van házi feladat. Ellenőrzik a házi feladatot. Ellenőrzik az órán kitűzött feladatokat. A pedagógus tisztában van a gyerekek órai teljesítményével, és lehetőség szerint az órai munkából legalább a lefele, vagy felfele kilógó gyerekek munkáját szóban értékeli.

6.5.	A gyermekeknek, a tanulóknak személyre szabott értékelést ad.	Értékelési rendszerét a portfólió dokumentumaiból meg lehet ismerni. (Pl. egy dolgozat értékelését tartalmazó óra tervéhez fűzött reflexióból)	A tanulói megnyilvánulásokra adott visszajelzéseiből egyértelműen kiderül, hogy a megoldás jó vagy nem. Az elmondott bizonyítás elégséges, vagy valami –konkrétan megfogalmazható– hiányzik. A beadott szerkesztés pontos vagy rossz. A tanulói megnyilvánulásokra adott visszajelzéseiből egyértelműen kiderül, hogy a megoldás jó vagy nem. Az elmondott bizonyítás elégséges, vagy valami –konkrétan megfogalmazható– hiányzik. A beadott szerkesztés pontos vagy rossz. A feladatok megoldásairól szóló értékelései világosak, érthetőek, egyértelműek.
6.6.	A gyermeki, a tanulói tevékenység rendszeres ellenőrzésének eredményeit szakszerűen elemzi, értékelésüket rendszeresen felhasználja fejlesztési céljainak, feladatainak kijelölésében.	A csoportprofilban (amennyiben korábbról ismeri a csoportot) szakszerűen feltárja a csoport tudásszintjét, amely diagnosztikus mérésekből, illetve a megelőző szummatív tudásmérések eredménye alapján tudható. Reflexióiból kiderül, hogy a témakör tanítása közben végzett fejlesztő értékelés milyen eredménnyel járt, és abból milyen következtetéseket vont le a pedagógus, saját munkájára, feladataira vonatkozóan.	A helyes megoldások értékelése során megerősít, a hibák felsorolása után biztat, utat mutat. Van dicséret, útmutatás minden értékelésekben. A gyerekek tudják a továbblépés, javítás, pótlás útját-módját, elegendő ismeretük van az értékelés során kapott osztályzat elfogadásához.
6.7.	Az értékelési módszerek alkalmazása során figyelembe veszi azok várható hatását a gyermekek, a tanulók személyiségének fejlődésére.	Szem előtt tartja, hogy az értékelés nem öncélú: minden értékelést követően a tanítás folyamatát az értékelés elemzése alapján nyert tapasztalathoz igazítja. Erről a tematikus tervhez fűzött reflexió ad információt.	Egyszerűbb számolási feladatok megoldásának értékelése során a tanuló maga is javíthatja a feladatait, szembesülve hibáival. A dolgozatok javítását mindig követi a feladatok közös megoldása, amikor is mindenki látja a jó megoldásait, illetve hibáit. Számolási feladatoknál a tanulók pontosan meg tudják állapítani, hogy milyen hibaszázalékkal dolgoztak, így önértékelésük javul.
6.8.	A gyermekek, a tanulók számára adott visszajelzései rendszeresek, egyértelműek, tárgyilagosak.	A portfólió dokumentumai erről nem adnak információt, kivéve, ha a feltöltött anyagok között kijavított, értékelt dolgozat is szerepel.	Az órán, a gyerekek reakcióiból kiolvasható, hogy a pedagógus visszajelzései rendszeresek-e, tárgyszerűek-e, igénylik-e, elfogadják-e a tanulók a visszajelzéseket. (Ha csak a látogatott órán történik visszajelzés, a tanulók értetlenül fogadják, és ezt viselkedésük tükrözi.)

6.9.	Elősegíti a gyermekek, a tanulók önértékelési képességének kialakulását, fejlődését.	Rendszeresen lehetőséget teremt a tanulóknak az önértékelésre. Óraterveiben helyet, időt biztosít erre a tevékenységre, reflexióiból kiderül az önértékelés minősége.	Az önálló munka értékelését, a tanári értékelést megelőzően a tanuló is elvégzi, a helyes megoldások ismeretében. Ennek az önértékelésnek egybevetése a tanári értékeléssel, fejlesztő, önismeretet javító hatású lehet. Ugyancsak segíti az önértékelési képesség fejlődését, ha szóbeli feleletet követően először a gyerek értékeli a saját produktumát (fejlett közösségben a társak is értékelhetik a feleletet), majd a sort a pedagógus zárja.
6.10.	Az intézményi pedagógiai programmal összhangban alkalmazott pedagógiai ellenőrzési és értékelési rendszert és módszereket, azok szempontjait az általa megkezdett nevelési-oktatási folyamat elején megismerteti a gyermekekkel, a tanulókkal, a szülőkkel.	A dolgozatok, értékelő lapok eredményeinek statisztikai elemzése is fontos, és a személyre szabott elemzések is előremutatók. Értékelő munkája során figyel arra, hogy a tanulók mely csoportjának még milyen segítségre van szüksége, hol kell lassítani a tanításban, mikor lehet esetleg gyorsabban haladni.	A dolgozatok tapasztalatai alapján javítja a felmerült hibákat, hiányokat.

<table>
<tr><th colspan="4">7. kompetencia: Kommunikáció és szakmai együttműködés, problémamegoldás</th></tr>
<tr><td colspan="4">Szaktárgyi KKK-k : "– Együttműködik a szaktárgyával rokon tárgyak tanáraival. Képes arra, hogy a rokon tárgyakban is megjelenő, egymásra épülő ismeretanyagok ütemezését egyeztesse.
– Kész együttműködni a matematika oktatása területén működő helyi fővárosi/városi/területi, megyei és országos szakmai fórumokkal; alkotó munkaközösségekkel, szakdidaktikai műhelyekkel."</td></tr>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Indikátorok</th><th colspan="2">Szakterületi/szakspecifikus példák</th></tr>
<tr><th>A portfólió alapján</th><th>Az óralátogatás alapján</th></tr>
<tr><td>7.1.</td><td>A gyermekek, a tanulók nevelése-oktatása érdekében kezdeményezően együttműködik a pedagógustársaival, a pedagógiai munkát segítő szakemberekkel és szülőkkel.</td><td>A csoportprofilban leírja a pedagógus, ha valamelyik tanítványának megsegítése érdekében összefogást kedvezményezett. Ugyancsak a csoportprofilból, vagy egy-egy óratervhez fűzött reflexióból tudható, hogy volt-e a csoporttal végzett munka során olyan helyzet, amelynek megoldásába kollégáit, szülőket, szakembereket is bevont. (Ha osztályfőnök, ez a tevékenység napi munkájának része)</td><td>Az órán nem tapasztalható a pedagógus ilyen jellegű tevékenysége.</td></tr>
<tr><td>7.2.</td><td>A gyermekekkel, a tanulókkal történő együttműködés elveit és formáit az alkalmazott pedagógiai program és az intézményi dokumentumok keretei között a gyermekek, a tanulók személyiségfejlődését figyelembe véve alakítja ki és valósítja meg.</td><td>A csoportprofilban fogalmazza meg a pedagógus az együttműködés elveit és formáit.</td><td>Az együttműködés ténye, minősége vagy hiánya tapasztalható az órán. Az együttműködés minőségét az óra hangulata jelzi leginkább.</td></tr>
</table>

7.3.	Tevékenysége során az intézményi pedagógiai programhoz igazodóan és a pedagógiai céljainak megfelelően érthetően és hitelesen kommunikál.	A pedagógus írásbeli kommunikációjának minősége, szakszerűsége, a dokumentumokból kitűnik.	Az órán a pedagógus pontosan, tisztán, érthetően beszél, szükséges, és az életkori sajátosságokhoz igazítva elégséges mértékben használja a szakkifejezéseket. Az új fogalmakat megmagyarázza, majd következetesen használja és elvárja a pontos szóhasználatot. Egész mondatokban teszi fel kérdéseit, és a gyerekektől is elvárja az egész mondatban történő válaszadást. Közös feladatmegoldás során a szöveges feladatok szövegét először ő olvassa fel, megfelelően hangsúlyozva, majd a gyerekekkel is felolvastatja. Önálló feladatmegoldás esetén a szöveget is a gyerekeknek kell magukban elolvasni, és értelmezni.
7.4.	Igényli a pedagógiai munkájával kapcsolatos rendszeres visszajelzéseket, nyitott azok befogadására.	A minősítést záró szakmai megbeszélés során válik világossá, hogy a pedagógus igényli-e, és elfogadja-e a visszajelzéseket, nyitott-e azok befogadására, elfogadására, vitaképes-e saját munkájának értékelése során.	Az órán odafigyel a gyerekek visszajelzéseire, szükség esetén változtat kommunikációján, módosítja előzetes elképzelését. (Ha túl gyors, túl lassú az óra menete, és a gyerekek kérik a változtatást. Ha nem értettek meg valamit, és ismételt magyarázatot kérnek, stb.).
7.5.	Szakmai megbeszéléseken kifejti, képviseli az álláspontját, képes másokat meggyőzni, és ő maga is meggyőzhető.	A minősítést záró szakmai beszélgetés során derül ki a pedagógus magatartásának ez az eleme.	Az órán nem lehet információt szerezni ezzel kapcsolatban..

8. kompetencia: Elkötelezettség és szakmai felelősségvállalás a szakmai fejlődésért			
Szaktárgyi KKK-k "– Elkötelezett a matematika, annak tanítása iránt. Elkötelezett az igényes tanári munkára, a folyamatos önművelésre. Részt vesz a szaktantárgy fejlesztési, innovációs tevékenységében. Fontosnak tartja a szaktárgyán belüli szakmai együttműködést. Tisztában van matematika etikai kérdéseivel."			
Indikátorok		**Szakterületi/szakspecifikus példák**	
		A portfólió alapján	**Az óralátogatás alapján**
8.1.	Tisztában van személyiségének sajátosságaival, és alkalmazkodik a szerepelvárásokhoz.	A pedagógus portfóliójának minden dokumentuma információt ad arról, hogy a pedagógus milyen mértékben képes alkalmazkodni a szerepelvárásokhoz. A tapasztalatot megerősítheti a védés során tanúsított magatartása,	A pedagógus önismeretének szintjét jelzi, hogy képes-e megfelelő mértékű önfegyelemre, képes-e az órán alkalmazkodni a helyzethez, a körülményekhez, a gyerekek és a vendégek elvárásaihoz anélkül, hogy ez a munka szakmaiságának rovására menne, anélkül, hogy bizonytalannak tűnne.
8.2.	A pedagógiai feladatok megoldásában együttműködik pedagógustársaival, munkaközösségeivel, a nevelő-oktató munkát segítő munkatársaival, a gyermek, tanuló fejlődését támogató más szakemberekkel.	A pedagógus együttműködési képességéről a munkahelyi vezetők tudnak hiteles információt adni, illetve az együttműködés tényét a pedagógus által elért szakmai-pedagógiai eredmények jelzik.	Óráit határozottan, magabiztosan, a gyerekekre figyelve, megnyilvánulásukra folytonosan reagálva vezeti. Biztonságot sugárzó magatartása azt sejteti, hogy megfelelő háttértudással rendelkezik, és csapat tagjaként végzi munkáját.
8.3.	Részt vesz szakmai kooperációkban, problémafelvetéseivel, javaslataival kezdeményező szerepet is vállal.	A szakmai kooperációban való részvétel nyitottságot feltételez. A pedagógus feltöltött szakmai anyagából látható (különösen a reflexiókból), hogy rendelkezik-e ezzel az attitűddel. A védés során lehetősége van beszámolni ilyen irányú tevékenységéről.	A nyitottság, kooperációra való képesség az óravezetéséből, a tanulókkal való kapcsolatából kikövetkeztethető. A kooperatív pedagógus csoportja is képes és hajlandó a kooperációra.
8.4.	Pedagógiai munkáját reflektivitás jellemzi.	Az önelemzésre, a korábbi terveknek a megvalósítás során történő elemzésére, felülvizsgálatára, és szükség esetén módosítására való képesség a reflexiókból látható. A védés folyamán szintén számot ad a pedagógus reflektivitásáról.	Az elemzés, értékelés, a korábbi elképzelések, tervek, ötletek felülvizsgálatára való képesség a matematika tanár mindennapi munkájának része: a nehezebb matematika feladatok megoldása során ő maga is reflektív módon alakítja ki a megoldáshoz vezető legjobb utat, és ezt várja el tanítványaitól is.

8.5.	Fontos számára szakmai tudásának folyamatos megújítása, a megszerzett tudását a pedagógiai gyakorlatában eredményesen alkalmazza.	A szakmai igényesség, a tudás folytonos megújítására való igény nyomon követhető a tanítandó anyag szakmai tartalmának minőségén, a módszerek és eszközök (köztük a legkorszerűbbek is) repertoárján.	A pedagógus önképzése és a továbbképzések során szerzett szakmai - módszertani ismereteit lehetőség szerint beleszövi a tanító munkájába, felhívja (érdeklődő) tanítványai figyelmét a számukra is elérhető, és tudásszintjük alapján megérthető szakmai anyagokra, azokra is, amelyeket a továbbképzéseken ismert meg. Módszertani repertoárját új, korszerű elemek (pl. interaktív táblára készült anyagok) alkalmazásával gazdagítja.

Az intézmény bemutatása szakos szemmel

Az intézmény neve: XY Gimnázium és Szakközépiskola

Címe: …

Iskolánk Budapest nyugati kapujában, nagyon szép környezetben, egy dinamikusan fejlődő kisváros középiskolájaként működik idén – 2014-ben – éppen 50 éve.

A településsel együtt az intézmény is óriásit fejlődött, mind tanulói és tanári létszámát, mind képzési kínálatát, színvonalát tekintve ma már elitiskolaként mutathatjuk be.

Jelenleg öt évfolyamos és hat évfolyamos gimnáziumi képzést nyújtunk, a szakközépiskolai képzésünk közgazdasági jellegű. Az érettségizettek számára kétéves művészeti képzésünk mozgóképi animáció, valamint fotográfia, illetve kerámiaműves szakirányokon folyik. 24 osztályban (15 gimnáziumi, 9 szakközépiskolás) összesen 620 diák (315 lány és 305 fiú) tanul. Az öt évfolyamos képzésben minden tanuló speciális nyelvi előkészítő osztályban kezdi tanulmányait. A hat évfolyamos osztályokban matematika tagozat működik. Az iskola vonzáskörzetéhez tartozik Budaörsön kívül a Zsámbéki-medence, Törökbálint, Biatorbágy, Bicske, de a főváros bizonyos részeiből is, jellemzően a XI. és a XII. kerületből járnak hozzánk gyerekek.

Budaörsön a német nemzetiségű kisebbség aránya a legmagasabb, de ez a tanulóközösségben nem jelenik meg hangsúlyosan. A tanulók szociális háttere a magyarországi átlaghoz képest igen jó, nagy többségében rendezett anyagi körülmények között, igényes, értelmiségi, gyakran vezető beosztásokban dolgozó szülők gyermekei tanulnak itt. Ennek megfelelően ambíciókkal, tudatos élettervekkel készülnek a továbbtanulásra a diákok. Természetesen a hátrányos helyzetűek vagy fogyatékkal, viselkedési zavarral élők számára is segítséget nyújtunk. (Autisztikus jeleket mutató tanulónk jelenleg is van.)

Az oktatáshoz, az iskola programjának megvalósításához biztosítottak a kiemelkedően jó tárgyi, infrastrukturális feltételek. Meg kell itt említeni Budaörs Önkormányzatát, amely korábban fenntartóként, 2013-tól működtetőként kiemelten támogatta, támogatja az oktatás ügyét, az intézmények működését, programjainkat, tanárainkat. 29 tanteremben tanulnak a diákok, 4 informatikaterem, több (fizika, kémia, biológia, földrajz, ének, rajz) szaktanterem segíti a képzést. Könyvtár, uszoda, tornacsarnok áll a diákok, tanárok rendelkezésére. Szabadtéri pályákon mozoghatunk, tágas aulában, illetve az épülethez kapcsolódó amfiteátrumban tarthatjuk meg az iskolai rendezvényeket.

A tantestületben 63 pedagógus tanít, 44 nő, 19 férfi. Kevés kivétellel egyetemi végzettséggel, többen két-három diplomával, illetve 12-en pedagógus-szakvizsgával rendelkeznek. Az iskola bővülésével gyarapodott a tanári kar létszáma, de az iskolát szinte csak nyugdíjba vonulás miatt hagyták el kollégák, stabil a tanári közösség, és ennek megfelelően az átlagéletkor viszonylag magas, 50 év körüli. Tíz munkaközösség dolgozik (matematika, fizika–informatika, kémia–biológia, földrajz–közgazdaságtan, magyar, történelem, angol, német, latin nyelvek, osztályfőnöki) funkcionális szervezetként korrekt, egymás munkáját elismerő légkörben és egy légtérben, ami a tanári szobát illeti. Természetesen nem diszjunkt halmazok ezek a közösségek, és egyébként az adott feladat megoldására (pl. karitatív munka, tantervírás, szalagavató) más csoportokat alkotva mátrixszervezetként is jól tud dolgozni a tantestület. Jellemző a nyílt kommunikáció, következménye a szabad, demokratikus légkör. A munkatársak feltétlen bizalmat élveznek, alapfeltevés, hogy mindenki legjobb tudásával végzi munkáját. A célokat, feladatokat közösen határozzuk meg, így azokat mindenki magáénak érzi. A tantárgyfelosztást a tantárgyfelelősök készítik a munkaközösséggel megbeszélve. A munkaterv feladatait vagy egyéb tevékenységeket (pl. ügyelet vagy osztálykirándulás-kíséret) önként vállalják az egyes tanárok vagy közösségek, és nem kijelölés vagy egyéb módon történik. Előfordul egyenetlen tehervállalás, ami feszültségeket szül. Ezt gondos nyilvántartással, a sokat vállalók elismerésével, időnként a nem vállalók felkérésével próbálja a vezetés kezelni. A pedagógusok értékelését a vezetők, a középvezetők, a tantárgyfelelősök végzik. Az idegen nyelvek, a matematika, az informatika oktatása, az egészséges életmódra nevelés deklaráltan prioritásként jelenik meg az intézményi feladatrendszerben. Matematikatanárként is igen jó tárgyi feltételek között taníthatunk, számítógépes termek, aktív tábla, Lénárd-gömbök, testmodellek, táblai eszközök, játékok állnak rendelkezésünkre.

Kilenc pedagógus tartozik a matematikatanári munkaközösséghez, amelynek 1998 óta vagyok a vezetője. Eredményesnek értékelik a munkánkat a tanítási órák, az érettségi, a felvételi, a kompetenciamérési mutatók, a versenyeredmények alapján is. Megbízatásomat felelősségnek, nem hatalomnak tekintem. Feladatom – többek között – az egyenletes munkamegosztás, az összehangolt követelményrendszer, az egymásnak nyújtott módszertani segítségnyújtás megszervezése, az egymást ösztönző, elismerő légkör megteremtése, a versenyek megszervezése. Büszke vagyok arra, hogy évek óta élvezem kollégáim bizalmát.

Más tevékenységi körökben is szerepet vállalok: a Természetjáró Kör egyik tanári segítője vagyok, pályázatok (HEFOP, Tehetségpont) végiggondolásában, konkrét megvalósításában is dolgoztam.

Pedagógiai programunk az „illyési” örökségben a morális igényességet, a felelősségtudatot tartja meghatározónak. Alapértéknek tekintjük, hogy a diákok számára intellektuális kihívást jelentő, igényes és következetes, a diák és tanár együttes munkájával megvalósuló tanórai tevékenységet; az olyan egészséges versenyszellemet, amely a tanulókat képességeik, tehetségük minél hatékonyabb kibontakoztatására ösztönzi; egészséges személyiségű, kellően önálló, önbecsüléssel, felelősségtudattal és döntéshozatali képességgel rendelkező diákokat neveljünk; megteremtsük a közösséghez tartozás élményét, a hagyományok ápolását, a toleranciát és a szolidaritást. Később kiegészült ez az élethosszig tartó tanuláshoz szükséges kompetenciák átadásának egyre időszerűbb igényével és a diákok személyiségfejlesztésének fontos elvével.

Az alapelvekből következő célok, megállapítások számbavételénél megjelenik az esélyegyenlőség fogalma, ami iskolánkban az ide járó diákok közötti különbségek csökkentését jelenti, valamint a vállalkozás, a kreativitás támogatását. A képzés rendjénél, a nevelés rendszerénél, a pedagógiai folyamatnál hangsúlyosan jelennek meg a fent említett alapértékek, csakúgy, mint a mindennapok gyakorlatában. A hagyományok ápolása, a személyiség kibontakoztatása és a kreativitás jegyében rendezzük meg 25 éve a mindenkori diákság nagy örömére a sport, kulturális, tanulmányi Illyés-kupát, a decemberi Illyés-napokat.

A tágabb közösséghez tartozás szempontjából is fontos szerepet kapnak az iskola kapcsolatai. Rendszeres a szülőkkel való kapcsolattartás, az osztály SZMK, iskolai SZMK (korábban iskolaszék) intézményén keresztül, de a szülői Facebook-csoportokban, közös piknikeken is erősödnek ezek a kapcsolatok. Nagy barátságok szövődnek a több program keretében futó diákcsere-látogatásokon is. Ilyen többek között a Bretzfeld-Budaörs testvérvárosi program keretében a bretzfeldi *Grund- und*

Hauptschule-val, a *Kultúrák Közötti Kommunikáció a Kárpát-medencében* program keretében a határon túli magyar iskolákkal való 20 éves múltra visszatekintő kapcsolat.

Szakmai életút értékelése

Pályámat ötödéves egyetemi hallgatóként egy nagyon rossz beiskolázású, vidéki középiskolában kezdtem. Azonnal kaptam gimnáziumi, szakközépiskolai és kétféle levelező tagozatos osztályt is. Ez a munka teljes ellentéte volt annak az érdeklődésnek, elképzelésnek, amelyre készültem az egyetemen. Jó feladatmegoldóként tehetséges gyermekekkel szerettem volna foglalkozni. Egy fiút találtam egy 9. szakközépiskolai osztályban, akiben volt elszántság, lendület a folytonos munkához. A vele való egyéni foglalkozás megmutatta, hogy ebben az irányban kellene haladnom. Ezt persze akkor még tudatosan nem láttam. Visszatekintve, a rendszeres önképzés, a feladatmegoldások beküldése *A matematika tanításá*nak feladatmegoldó rovatába, jelezhették volna ezt a hiányt. Az iskolai munka az időmet nagyon igénybe vette, de folyamatosan képeztem magam, vásároltam a könyveket, feladatgyűjteményeket. A következő tanévben visszakerültem abba az iskolába, ahol magam is érettségiztem. Itt már volt lehetőségem tehetséges gyermekekkel is rendszeresen foglalkozni. Munkám gerincét azonban itt is a szakközépiskolai és levelező tagozaton végzett tevékenység alkotta.

Azt a hosszabb kihagyást szakmai fejlődésemben, amelyet igazgatói megbízásom hozott, két szerencsés véletlennek köszönhetően sikerült lerövidítenem, talán megállítanom. Az 1992/93-as tanévtől hétvégenként rendszeresen foglalkoztam egy, a budapesti Z Gimnázium speciális matematika tagozatára járó diákkal, illetve még ugyanebben az évben meghívást kaptam a speciális matematika OKTV zsűrijébe is. Ez a két tevékenység nagyon inspirálta további önképzésemet. Az OKTV-ben végzett tevékenységnek sok szakmai kapcsolatot, későbbi nyári tábori munkát, a veszprémi tehetséggondozó iskolai tanári munkát, és nem utolsó sorban a doktori képzésre történő jelentkezést is köszönhetem. Ha még tovább gombolyíthatjuk az idő fonalát, akkor egyik doktori tárgyam vizsgáján vetődött fel, hogy lenne-e kedvem Budapestre jönni az X Gimnáziumba. Innen már nyílegyenes volt az út a jelenlegi munkahelyemig és beosztásomig. Visszatekintve úgy látom, hogy az igazgatói munkám idején már teljesen tudatos volt a szakmai tevékenység fejlesztése. Ezért vállaltam később megyei szaktanácsadói szerepet és számtalan továbbképző előadást. A szaktanácsadás eléggé válságban volt már ebben az időben. Legfőbb szakmai hozadéka talán más műhelyek megismerése és a mérés-metodikai alapok tanulása volt. Segítséget egykori egyetemi oktatóimtól és más városokban tanító kollégáimtól kaptam.

Sok szakmai tapasztalatot adott az is, hogy legalább egy évtizedig szerveztük, rendeztük a megyei középiskolai matematikaversenyt. Ez a verseny hagyományosan kétfordulós volt. (Néhány évig két írásbeli fordulóval is próbálkoztunk, de azok nem bizonyultak életképesnek a kollégák és a diákok túlterheltsége miatt.) Az iskolai fordulóban hat feladatot kellet kb. három hét alatt, otthon, önállóan megoldaniuk a versenyzőknek. Azután ezt tanáraiknak adták át. A tanárkollégáknak részletes javítási útmutatót készítettünk. A dolgozatot az iskolában a szaktanárok javították. Az így megszerezett pontszám alapján rendeztük a verseny döntőjét, ahol az első forduló pontszámai 20%-ban számítottak. A döntő a gyors kiértékelés érdekében feleletválasztós, ún. amerikai tesztverseny volt. Ez akkoriban még eléggé újdonságnak számított Magyarországon. Csak később jelentek meg a Zrínyi-, a Gordiusz- és a Kenguru-versenyek. Ez a szerteágazó műhelymunka minden tekintetben kiváló iskola volt. Szükség volt saját feladatokra, megoldások megfogalmazására, útmutató készítésére, továbbá rengeteg szervezésre. Indítottunk iskolai folyóiratot is. Ez a folyóirat tartalmazott feladat rovatot, érdekes szakköri feladatokat, érettségi ajánlásokat, friss eredmények beszámolóit, továbbá tanulói írásokat is.

Egy alkalommal szerveztünk nyári tehetséggondozó tábort közösen erdélyi kollégákkal, gyerekekkel. Ennek a 10 napos tábornak (1993) a különlegességét az adta, hogy kísérletet tettünk arra, hogy a gyerekeknek bemutassuk a kétféle matematikaoktatás eltérő vonásait. Ezt a következő módon próbáltuk megvalósítani. Kiszemeltünk minden napra egy-egy átfogó témakört, amely például az érettségin is szerepel (pl. logaritmus, hasonlóság, egyenlőtlenségek). Ezekről a témákról a délelőtt folyamán egy magyarországi és egy erdélyi kolléga is tartott másfél órás előadást. Megfűszerezve olyan feladatokkal, amelyek jellemzőek az adott témában saját versenyeiken, vizsgáikon. Ezt követte ebéd után két feladatmegoldó szeminárium, ahol mindkét matematikai kultúra feladatanyagából kaptak egy-egy foglalkozást a gyerekek. Ezt követte 4-től 7-ig a szabadidős tevékenység, amelynek keretében sport, közösségi játékok, sakk, társasjátékok szerepeltek. Vacsora után még egy órás ismeretterjesztő előadás, bemutató volt a legkülönfélébb érdekességekről. Néhány ezek közül: megoldatlan számelméleti problémák, Erdős Pál életét bemutató rövidebb film és előadás, lézerbemutató, érdekes kísérletek, térbeli ábrázolások számítógéppel, latin-görög négyzetek. A táborban 5 tanár, megyénkből 30, Erdélyből 20 diák vett részt. Az utolsó előtti napon egy kisebb házi versenyt is szerveztünk az előző nyolc nap anyagából. A gyerekeknek nagyon tetszett a tábor. Mi, felnőttek is rendkívül sokat tanultunk, főként egymástól. Abban egyeztünk meg, hogy más alkalommal szervezve több tanárt szükséges bevonni ebbe a munkába. Sajnos források híján ezt a tábort nem tudtuk megismételni. Saját kezdeményezésünktől függetlenül már ekkor is sikeresen működött az OKSZI, illetve a Matematikatanárok Nyári Egyeteme (Vác, Szeged, Kőszeg), ahol később több alkalommal magam is részt vehettem hallgatóként, előadóként.

Ettől az időszaktól már tudatosan haladtam a tehetséggondozás irányába. Minden évben részt vettem a Rátz László Vándorgyűlésen, ahol két alkalommal szemináriumot is vezettem. Folytattam *A matematika tanításá*ban a feladatok beküldését, első perctől olvasója és kezdetben megoldója is voltam a *Polygon* című színvonalas folyóiratnak. Szolnokon két tanévben megyei olimpiai szakkört vezethettem a Bolyai Társulat felkérésére. Közben volt egyetemi tanárom, mentorom, dr. FR javaslatára jelentkeztem a KLTE doktori iskolájába 2000-ben. Ezután egy közel ötéves, nagyon intenzív tanulási periódus következett. Fel kellett készülni nyolc vizsgára a matematika és a didaktika különféle területeiről, produkálni kellet legalább két tudományos publikációt és letenni egy középfokú és egy alapfokú nyelvvizsgát. Eközben új munkahelyemen, az X Gimnáziumban is meg kellett felelnem a kihívásoknak. Ez az öt év tulajdonképpen egy második egyetemi periódussal ért fel. A sok új matematikai és módszertani ismeret teljesen megújította a szakmai tevékenységemet. Ez volt a legjobb felkészülés az Y Gimnáziumban 2004-től óraadóként, majd 2009-től főállásban betöltött jelenlegi munkámhoz.

A szakmai életút értékelése a kompetenciák alapján:

1. *Szakmai feladatok, szaktudományos, szaktárgyi, tantervi tudás*

A fentiekből remélhetőleg kitűnik, hogy szakmai fejlődésemben ezt a területet érzem legsikeresebbnek. Egy kis, vidéki középiskola érdeklődő diákjaként hatalmas hátránnyal indultam (ma látom csak, hogy mekkora hátránnyal!) a tanári pályán. Több szerencsés véletlennek, az érdeklődésnek és a későbbi tudatos fejlesztésnek köszönhetően jutottam el odáig, hogy mára a budapesti Y Gimnázium speciális matematikatagozatán is taníthatok.

2. *Pedagógiai folyamatok, tevékenységek tervezése és a megvalósításukhoz kapcsolódó önreflexiók*

Ebben a tekintetben elsősorban az osztályfőnöki munkának és a vezetői tevékenységemnek köszönhetően értem el eredményeket. Igazgatóként egészen más szinten is meg kellett terveznem az iskolai pedagógiai folyamatokat. Mára ezek a tevékenységeim már sokkal kevésbé hatékonyak, mint a korábbi években. Ez lehet hangsúly eltolódása, de az életkorom távolodása is az aktuális tanulói korosztálytól. Budapesti munkahelyeimen kerültem az iskolai szintű szervezési feladatokat. Csoportjaimban, tanórai munkámban nincsenek szervezési gondjaim. Talán túlságosan is ragaszkodom a jól bevált, az évek során hatékonynak bizonyult formákhoz. Ezen érdemes lenne változtatnom. Színesebbek, változatosabbak lehetnek az órák, ha változatosabb a tevékenységek szervezése.

3. *A tanulás támogatása*

Ezt ismét egy elég erős területnek érzem. Az évtizedek során sikerült elérnem, hogy diákjaim nem félnek a tantárgytól. Szívesen és sikeresen tanulják a matematikát. A legnehezebb csoportjaimban sem volt bukás sohasem a tárgyamból. Ha szükséges volt, különórákkal, önként vállalt további korrepetálásokkal biztosítottam a gyerekek felzárkózását. Erre a jelenlegi helyzetben már nincs szükség.

4. *A tanuló személyiségének fejlesztése, az egyéni bánásmód érvényesülése, a hátrányos helyzetű, sajátos nevelési igényű vagy beilleszkedési, tanulási, magatartási nehézséggel küzdő gyermek, tanuló többi gyermekkel, tanulóval együtt történő sikeres neveléséhez, oktatásához szükséges megfelelő módszertani felkészültség*

Ezen a területen jórészt ösztöneimre, diákként, majd szülőként átélt fontos élményeimre, tapasztalataimra támaszkodom. Ebben a tekintetben nem fejlesztettem tudatosan módszereimet. Igyekeztem minden esetben a neveltetésemből is fakadó humánummal közelíteni ezekhez a tanulókhoz. Első osztályfőnökségem alatt volt egy igen súlyos esetem, amely azóta is emlékezetes. A kislányt édesanyja nevelte, aki súlyos alkoholbetegségben szenvedett. Rendszeresen nem járt iskolába. Nagy pedagógiai eredménynek tartom, hogy sikerült rávenni tanulmányainak folytatására, sikeres érettségi vizsgát tett. Az utóbbi 10 évben hátrányos helyzetű gyerekekkel nem foglalkoztam. Annál gyakoribb a beilleszkedési nehézség, az autisztikus személyiség, a túlzott szülői elvárás okozta stressz. Ezekhez az esetekhez nagyon nagy tapintattal próbálok közeledni. A kollégáim már évtizedes tapasztalatokkal rendelkeznek, így tudok támaszkodni tanácsaikra, javaslataikra. Igyekszem közeli, egészen személyes kapcsolatot kiépíteni a problémával küzdő gyerekekkel. Ez a személyes kapocs ad lehetőséget azután arra, hogy feltárjuk a problémát, őszinték lehessünk. Ezek a beszélgetések minden esetben csak négyszemközt lehetségesek.

5. *A tanulói csoportok, közösségek alakulásának segítése, fejlesztése, esélyteremtés, nyitottság a különböző társadalmi-kulturális sokféleségre, integrációs tevékenység, osztályfőnöki tevékenység*

Ezen a területen igen jelentős eredményeket ért el az Y közössége. Az előző pontban leírtak ide is vonatkoznak. Ezeken kívül szeretném megemlíteni, hogy nagy hangsúlyt fektetek a közös osztálykirándulásokra. Hiszek ezek közösségformáló erejében. Minden olyan tevékenység, amely közösen folyik és közös eredménnyel zárul, erősíti a közösséget. Ezért is vállalkoztam, még a jogszabály életbe lépése, kötelező bevezetése előtt arra, hogy egy hétre elviszem az osztályomat közösségi munkára. 10. osztály végén a Pro Vértes Közalapítvány erdei iskolájában dolgoztunk egy hetet. Sikerült olyan munkát kapnunk, amely életre szóló közös élményhez juttatta a gyerekeket. Egy, korábbi években már nem használt juhhodályt alakítottunk át történeti kiállítássá. Régi mezőgazdasági eszközöket és a mezőgazdasághoz kapcsolódó mesterségeket mutatnak be az egyes szegmensek. Nehéz, de nagyon kreatív és változatos munka volt. Igazi kihívás az osztálynak és szervezőként nekem is. Külön élmény volt, hogy a külvilágtól teljesen elzárva, egymásra utalva töltöttük az estéket is.

6. *Pedagógiai folyamatok és a tanulók személyiségfejlődésének folyamatos értékelése, elemzése*

Ez a tevékenység jórészt a kollégáimmal, az osztályaimban tanító tanárokkal közösen történik. Igyekszem a szülőket is bevonni ezekbe az értékelésekbe a fogadó órák és értekezletek alkalmával. Ezek nem sikerültek jól az utóbbi időben. A problémákat kívül helyezték a családon, az iskolára hárították a kudarc miatti teljes felelősséget. Ezen a területen van bizonyos visszalépés a részemről. Korábbi osztályaimnál osztályfőnöki órákon és egyénileg is foglalkoztunk ilyen kérdésekkel. Most a rohanó világ, az internet, a közösségi oldalak megváltoztatták a szokásokat.

7. *Kommunikáció és szakmai együttműködés, problémamegoldás*

Ez az egyik erősségem. Azt hiszem, vezetői munkám során is ennek a képességnek köszönhettem a legtöbbet. Nagyon szívesen és sokat dolgozom teamben. Szeretem az embereket, szeretek kapcsolatokat építeni, emberek dolgai iránt érdeklődni, ha lehet, segíteni. A kulturális különbségek miatt budapesti munkavállalásom kezdetén voltak kisebb kudarcaim. Nehezen tudtam felmérni, hogy mekkora távolságot tartanak egymástól a nagyvárosi emberek. Vidéki tanárként, a szülővárosomban, ahol mindenki ismert és mindenkit ismertem, ahol a szülők iskolatársaim voltak, lényegesen közelebbi kapcsolatom volt az emberekkel és kollégákkal. Öt év alatt azt hiszem sikerült megszoknom, jól eltalálnom a megfelelő távolságot, azóta ismét sikeresebb vagyok az emberi és szakmai kapcsolataimban. A problémamegoldással kapcsolatban negatív jelenségként élem meg, hogy az idő múlásával nehezebben viselem a rendezetlen dolgokat magam körül. A problémákat könnyen felismerem − sokszor túlságosan is −, és azonnal, túlreagálva próbálom megoldani. Ez korábban egyáltalán nem volt jellemző rám. Mára már stresszelnek a szoros határidők, a teljesen váratlan feladatok.

8. *Elkötelezettség és szakmai felelősségvállalás a szakmai fejlődésért*

Erre a kompetenciára a két rendezvénnyel kapcsolatban (megyei verseny, nyári tábor) már kitértem. Igyekeztem azt is megvilágítani, hogy milyen lépésekben növekedett, vált tudatossá az önképzésem, találtam meg a munkámban a számomra legmegfelelőbb fejlődési irányt.

Szakmai életutamat az átlagosnál sokkal sikeresebbnek ítélem. Nagy utat jártam be az elmúlt 30 évben. Eredményeimért keményen kellett dolgoznom. A tanítványoktól cserébe nagyon sok szeretetet, ragaszkodást kaptam, sok barátom korábban a tanítványom volt. Leírhatatlan a sok közös intellektuális élmény, amelyet átélhettem a diákjaimmal. Ezért érdemes leginkább dolgozni.

Budapest, 2014. április 22.

Matematikafakultációs csoportprofil

A 11. e osztály matematikafakultációs csoportjának bemutatása

Iskolánk 11. e. osztálya természettudományi osztály. A tanulók két évig – 9. és 10. osztályban – megemelt óraszámban tanulták a matematikát, a fizikát, a kémiát és a biológiát. A 10. osztály végén kellett dönteniük, hogy melyik két tárgyat választják (kötelezően) fakultációs tantárgyként. A matematikával lehetséges párosítás a kémia vagy a fizika lehet. Abban a nagyon jó helyzetben vagyok, hogy ennek az osztálynak osztályfőnöke is lehetek.

Az osztály, így a csoport is nagyon jó adottságokkal rendelkezik. Induláskor az a különleges helyzet adódott, hogy a 17 tanuló már általános iskolás korában is ebbe az iskolába járt. A gyerekek ismerték egymást, a helyet, a tanárokat, a követelményeket, a hagyományokat. A kiválasztást kémia, fizika és biológia szakos kollégáim is segítették. Már kilencedik osztálytól csoportbontásban tanulták a matematikát, melyet órarendi problémák miatt a diákok angol nyelvi tudásszintjéhez igazítva kellett elkészítenünk. Ettől több szempontból is nagyon tartottam. Egyrészt nagyon nagy különbségek voltak induláskor az általános iskolából hozott ismeretek mennyiségében és mélységében, másrészt az osztály induláskor a későbbi biológia- és kémiafakultációsokat is magába foglalta, így várható volt, hogy mindkét csoportban lesznek kevésbé motivált, lemaradó tanulók. A félelmeim messze nem igazolódtak be. Mindkét csoportban nagyon jó munkalégkör alakult ki már az első hónapban, amely gyakorlatilag a kritikus 10. évfolyamra is megmaradt. Komoly lemaradása egyetlen egy tanulónak van, aki egyrészt a gimnázium mellett a konzervatóriumot is végzi, másrészt nincs is elegendő ambíciója a matematika tanulásához. Az első pozitív visszajelzéseimet a dolgozatok kiváló eredményei adták, azután pedig következett az Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, ahol az osztálynak több mint fele továbbjutott a második fordulóba. Sajátos, közös tanulási, belső korrepetálási szokások alakultak ki és mindkét csoportban volt 6-8 húzóember, aki gondoskodott az egész csoport megfelelő tempójáról, megadta az órák sodrását. Az órai munkát rendszeres, heti kétórás szakkör egészítette ki, amelyet azóta is töretlenül folytatunk. Itt nagy hangsúlyt kap az önálló gondolkodás. A témakörhöz kapcsolódó feladatokat lehetőség szerint 5-6 nappal korábban kiosztom, így mindenki önálló munkával készül a következő foglalkozásra, ahol megoldásaikat ismertetik is.

Ezekkel a nagyon jó előjelekkel alakult meg 10. osztály végén a fakultációs csoport.

A csoport létszáma **19 fő, 2 lány és 17 fiú**. Mindannyian emelt szintű érettségi vizsgát kívánnak tenni a 12. év végén. Ennek megfelelően a motiváció adott, mindenki elkötelezett a jobb eredmény elérésében. Sajnos az egyedi sajátosságok, a tudatosság, a szülői odafigyelés nagyon eltérő szintje, továbbá a nem elhanyagolható, folyamatos kortárs és társadalmi hatások felszakították a korábbi egységes képet. Ezt tovább erősíti az a szokásos tény is, hogy a tanulmányok előrehaladásával szokásosan eltérnek az absztrakciós képességek, nagyon eltérők lesznek a korábbi ismeretek új helyzetekben történő alkalmazására vonatkozó kompetenciák, visszaütnek a korábbi, felszínes tanulás hiányosságai. A fentiek miatt a korábbi egységes kép jelentősen árnyalódott.

Van egy **6-7 fős** része a csoportnak, akik hihetetlen elkötelezettséggel, az órán tanultak maximális bevésésével, külön feladatok (szakkör, KöMaL) vállalásával az összes házi és szorgalmi feladat megoldásával és egy állandó készenléti, feladatvállalási attitűddel húzzák, viszik az egész csoportot. Hatalmas munkabírással, kedvvel tekintenek minden új problémára. Köszönhetően a közülük kimagaslóan érett szociális érzékenységű diákoknak, ez a verseny nagyon emberi és egymás eredményeinek, megoldásainak, szép ötleteinek teljes elismerésén, tudatos beépítésén keresztül normális mederben folyik. Az egész csoport összetartozásának a teljesen toleráns légkörben, egymás előrehaladásának és fejlődésének tiszteletében tartásában megnyilvánuló személyes munkakapcsolat a kovásza. Ez a légkör számomra teljesen új. Korábbi fakultációs csoportjaimra nem volt jellemző a *közös* gondolkodás, egymásra figyelés. Mindenki végezte a saját dolgát, saját előrehaladása, eredményessége érdekében elmondta megoldásait a táblánál, de nem törekedett társai ötletének mind teljesebb megértésére, a másik tanuló sajátjánál jobb ötletének elismerésére, mi több, azonnali beépítésére. Ez számomra igen speciális helyzet, mióta felismertem, tudatosan építek erre az órai szervezésben. Egyes ötletek, fordulatok, módszerek nevet kapnak. A csoport tagjai ezek után már úgy hivatkoznak erre, hogy XY-tól tanultuk, UV módszere, ötlete szerint. Ez egy folyamatos megerősítés az adott személynek, egy szép gesztus a társak részéről, ugyanakkor az egyes fontos módszerek bevésését, alkotó beépítését is támogatja. Tapasztalataim ezzel kapcsolatban nagyon kedvezőek. Szerencsésen alakult az is, hogy a jó képességű csoportokban szokásosnak tekinthető nagyképűséget tudatosan igyekeznek, szinte csoportterápiában, visszaszorítani. Két fiúra jellemző ez, különösen az egyiküknél gyakori az ezzel kapcsolatos fordulat, mert a legsikeresebb csoporthoz tartozik. Azokat a megnyilvánulásait, amelyeket a csoport fölösleges, nagyképű megjegyzéseknek tart, folyamatosan kritizálják, terelik, kiiktatják.

Egyedi **a két lány** helyzete a csoportban. Egyiküknek nagyon jó ötletei vannak, viszont a végrehajtás során rendszeresen hibázik. Emiatt sok esetben nagyon frusztrált a dolgozatok után. Ezt enyhíteni csak órai munkájának rendszeres elismerésével, ötleteinek dicséretével és ezek felhasználásával sikerül. Komoly zenei tanulmányokat is folytat. A másik kislány hallatlan szorgalmas és kötelességtudó. Mindent alaposan megtanul és minden órai eljárást hűen visszaad a számonkérésnél. Egyedi ötletei nincsenek, a matematika kívül esik közvetlen érdeklődésén. Kiváló eredményei vannak viszont fizikából és angol nyelvből. Mindkettőjüket tisztelet övezi a csoportban, de nem tartoznak az előbb említett 6-7 fős húzó maghoz.

A munkájukat pedánsan és odaadóan végző, de jóval kisebb órai aktivitást mutató tanulók − az előbbi aktív magon felül − **4-5 főre** becsülhető. Ritkán szólnak hozzá az órai feladatok megoldásához, de amennyiben táblához kerülnek, vagy dolgozatot írnak, láthatón magabiztosan teljesítenek. Ebben a kicsit visszahúzódó magatartásban lehet személyes tulajdonságaik, jellemük mellett egy olyan beidegződés is, hogy az első csoportba tartozók majd úgyis el fogják mondani a megfelelő ötletet, fölösleges jelentkezniük, szerepelniük. Ezt a visszahúzódást, csöndességet a csoport szintjén is igyekszünk tudatosan kezelni. Ha többen is jelentkeznek, akkor minden esetben az kap szót, aki közülük legkorábban jelentkezett, beszélt az órán. Ezt az elvet mindenki ismeri és tiszteletben tartja a csoportban. Sajnos még ezzel együtt sem szerepelnek az órákon megfelelő rendszerességgel.

Van a csoportban **3** olyan **fiú**, akiknek elsősorban a szorgalmával van gond. Mindhármukra igaz, hogy rendszeres, kitartó munkával sokkal jobb eredményt érhetnének el. Ennek a szintjében van közöttük eltérés, de az mindenképpen közös, hogy az erőkifejtés nem elégséges. A szülők közül kettő mindenben partner, segíteni próbál különféle eszközökkel ezen a helyzeten, a harmadik fiú esetében azonban hiányzik a szülők részéről a teljes támogatottság. Éppen ennek a fiúnak a legegyedibb és legkülönlegesebb a matematikai problémaérzékenysége, kiváló lenne az absztrakciós képessége is, de sajnos ez az eredményességben nem tud a szorgalom hiánya miatt megmutatkozni.

Következzenek végül a csoportban a valamilyen szempontból hátrányokkal, illetve kedvezőtlenebb helyzetben dolgozó tagok. A problémáik nagyon egyénre szabottak és teljesen más okokra vezethetők vissza, ezért egyesével, külön tárgyalom ezeket.

Az első fiú problémái alapvetően családi jellegűek. Kiváló képességű gyerekről van szó, aki kilencedikes korában Arany Dániel versenyen döntős volt. Olyan menedzseri, vezetői képességekkel rendelkezik, amelyek korát meghazudtolóak. Szívesen és sok közösségi munkát végez iskolai szinten. Előbb barátnője súlyos betegsége, majd szülei rendezetlen családi helyzete nagyon visszaveti az iskolai munkában. Felelősen és komolyan akar segíteni olyan helyzetekben, amelyekhez nincsenek tényleges eszközei. Eredményt nem tud elérni, emiatt frusztrált, gondolatai folyamatosan a megoldatlan emberi problémák körül mozognak, nem tud sem az órákon, sem az otthoni tanulásban rendesen koncentrálni. Eredményei minden tárgyból jelentősen romlottak a 11. évre. Kivételt az OKTV első fordulója jelentett, ahol nem az iskolai elsajátított tananyag ismeretén, hanem a gondolkodás fejlettségén, tisztaságán volt a nagyobb hangsúly. Itt nagyon sikeres volt, de ezt a sikert sem sikerült a mindennapi közös munkában előnyünkre fordítania. Amíg a szülők nem rendezik megnyugtatóan az érzelmi környezetet, addig a problémákkal, iskolai kudarcokkal továbbra is számolnunk kell. Ez annak ellenére így van, hogy az érintett tanulóval, édesanyjával, nyíltan és őszintén beszélgetünk ezekről a problémákról, és arról, hogy neki elsősorban nem ezzel és nem így kellene most foglalkoznia.

A második tanuló, akinek tanulási nehézségei vannak a csoportban, önértékelési problémával küszködik. Kitűnően rajzol, tehetséges zenész. Érdekli a történelem és a művészetek. Képtelen azonban téthelyzetben jól teljesíteni. Minden dolgozatnál az első öt perc után a stressz blokkolja a gondolkodását, feladja, képtelen a továbbiakban koncentrálni a feladatra. Ezt enyhíteni próbáljuk alternatív számonkéréssel, órai munkával, de tudomásul kell venni, hogy az érettségi vizsgán hasonló, sőt jóval nagyobb stressz lesz, amelyre fel kell készülnie. Ezt ismerve, felismerve is önértékelési gondjai vannak, minden dolgozat után úgy érzi, hogy butább, mint a többiek, nincs helye ebben a csoportban. Eddig nem értünk el valódi eredményt ebben. Szép tervei, hogy formatervező legyen, csak akkor valósulhatnak meg, ha ezt a problémát meg tudja, tudjuk oldani.

A fent leírt problémák nem feltétlenül lennének egy másik csoportban, egy másik közösségben is ekkora problémák. Hatásukat az egymáshoz képest vizsgálható eredményesség, haladási sebesség, tudatosság felerősíti. Ezt demonstrálandó, jelzés értékű, hogy az OKTV első fordulójában 18-an indultak és 17-en elérték a továbbküldhetőség pontszámát, 10-en pedig be is jutottak a második fordulóba. A döntőbe két tanuló került. További érdekesség, hogy közülük csak az egyik fiú tartozik a 6-7 fős nagyon aktív magba. A másik csöndes, fölöslegesen nem megszólaló, ám barátságos fiú. Egy évvel később került az osztályba, de rövid idő alatt tiszteletet vívott ki eredményeivel, szerénységével.

Ez eddigi pályafutásom emberileg legkiforrottabb közössége, mind az osztályt, mind a fakultációs csoportot tekintve. Szakmailag még jelentős tartalékok vannak. Az analízis tárgyalását még csak most kezdjük, ahol először fordulunk abba az irányba, ahol legtöbbet fognak majd mozogni a későbbiekben és ahol legelőször van egy minőségi absztrakciós ugrás. Ez minden csoportnál átrendezi egy kicsit az erőviszonyokat. Van még egy teljes tanévünk, hogy közös sikereinket, szakmai élményeinket tovább is gyarapítsuk.

Budapest, 2014. október 15.

Tematikus terv – trigonometria

A pedagógus neve, szakja: XY, matematika

Az iskola neve: Gimnázium

Műveltségi terület: matematika

Tantárgy: matematika

A tanulási-tanítási egység témája: trigonometria, a trigonometria alkalmazásai (Alakzatok síkban és térben tartalmi terület)

Osztály: 12. c osztály (a 11. évfolyamos tanterv szerint a 0. évfolyam miatt) a heti óraszám: 3

A tanulási-tanítási egység cél- és feladatrendszere:

- a „tájékozódás a térben” komplex célhoz egy hatékony eszköztár nyújtása;
- geometriai kérdések, feladatok algebrai eszközökkel való vizsgálata, megoldása;
- a diszkussziós igény tudatosítása és fejlesztése;
- a matematikai bizonyítás kompetenciájának fejlesztése;
- logikai elemek bemutatása;
- a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése;
- a szögfüggvényekről, a háromszögekről való ismeretek kiszélesítése;
- a precíz számolás igényének erősítése;
- a pár- és a csoportos munkára való képesség fejlesztése.

A tanulási-tanítási egység helye a fejlesztési folyamatban, előzmények:

Az általános iskolában, ill. az alsóbb középiskolai évfolyamokon eddig egymástól elkülönülten találkoztak a tanulók geometriai, függvénytani és algebrai problémákkal, ill. az ilyen eszközök használatával. A trigonometria alkalmazásai témakörében először találkoznak az euklideszi geometria, a (szög)függvénytan és az algebrai számítások együttes ismeretének és használatának igényével és szükségletével, ráadásul a vektorkoordinátákkal való műveletek kapcsán az analitikus geometria révén betekintést nyernek a geometria és az algebra ötvözésének lehetőségeibe is. Komplexitása miatt ez az egyik legnehezebb témakör a 11. évfolyamos anyagban. A Bloom-féle taxonómiarendszer fogalmaival [ismeret, megértés, alkalmazás, még magasabb (diszkussziós) művelet] élve csak a legjobb képességű csoportokban (pl. a matematika tagozaton) lehet kitűzni a diszkussziós műveleti szint elérését, az alkalmazási szint is már jónak mondható, én ezt a szintet tűztem ki az érintett csoportban.

Tantárgyi, más kompetenciaterületekhez való kapcsolódás:

- a komplex matematikai gondolkodás (a geometria, az analízis, az algebra), problémamegoldás kiváló „gyakorlóterepe”;
- direkt módon kapcsolódik a fizikához (vektorok, koordinátarendszerek, skalárszorzat);
- direkt módon kapcsolódik, elengedhetetlen a „*tájékozódás a térben*” NAT-os alapcél megvalósításához (pl. helymeghatározás, GPS);
- anyanyelvi, kommunikációs kompetenciák: szabatos diszkusszió, érvelés, kiselőadások tartása;
- kooperációs kompetencia: pl. pármunka, csoportmunka;
- digitális, IKT-kompetenciák.

Felhasznált források: NAT; kerettanterv; pedagógiai program (helyi tanterv); Csordás Mihály – Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – dr. Urbán János – Vincze István 2004. *Matematika tankönyv 11.* Sokszínű matematika. Mozaik Kiadó. Szeged. [= tk.]; Árki Tamás – Konfárné Nagy Klára – Kovács István – Trembeczki Csaba – dr. Urbán János 2010. *Matematika feladatgyűjtemény 11.* Sokszínű matematika. Mozaik Kiadó. Szeged. [= fgy.]; Hortobágyi István – Környei László 2004. *Egységes érettségi feladatgyűjtemény*. Konsept-H Könyvkiadó. Piliscsaba.; Feynman, Richard Phillips 1968. *Mai fizika 1−9.* Műszaki Könyvkiadó. Budapest.; Simonyi Károly 2011. *A fizika kultúrtörténete.* Akadémiai Kiadó. Budapest.; internet.

Óra	***A téma órákra bontása***	***Ismeretanyag, házi feladat***	***Fejlesztési területek***	***Didaktikai feladatok és alapelvek***	***Óratípus, munkaforma***	***Módszer***	***Eszközök (tárgyi, taneszköz)***	***Megjegyzések (pl. gondolkodási műveletek)***
1.	Műveletek vektorokkal (emlékeztető)	Vektor, helyvektor, a vonatkoztatási rendszer fogalma, vektorműveletek. Házi feladat: a felfrissített tudást gyakoroltató feladatok.	A biztos számolási képesség kompetenciája	Ismétlő rendszerezés, alkalmazás, gyakoroltatás; motiválás, aktivizálás	Ismétlő, gyakorló óra; frontális, pár-, egyéni munka	Megbeszélés Tanári magyarázat	Vonalzó, táblai rajz Tk., fgy.: feladatok a vektorműve-letek gyakorlására	modellalkotás, integráció
2.	Vektorok skaláris szorzata, a művelet tulajdonságai	A komplex számhalmazon megismert műveletek értelmezhetősége a vektorok halmazán. Házi feladat: gyakoroltató feladatok.	Az analitikus gondolkodás, a diszciplínák összekapcsolásának (mat.-fiz.) lehetősége	Új ismeretek feldolgozása; motiválás, aktivizálás	Új ismereteket feldolgozó óra; frontális és páros munka, kiselőadás	Tanári magyarázat, egyéni ötletgyűjtés	Táblai rajz, vonalzó Tk., fgy.: feladatok a skalárszozás gyakorlására	Tényismeret és rutinműveletek
3.	A skalárszorzat kiszámítása a vektorok koordinátáiból	A definíció és a tétel kapcsolata. Házi feladat: gyakorló feladatok.	Analitikus gondolkodás,	Új ismeretek feldolgozása; motiválás, aktivizálás, rendszeresség	Új ismereteket feldolgozó óra; frontális és csoportmunka	Új összefüggés felfedeztetése, kimondatása	Táblai rajz, levezetés Tk., fgy.	Tényismeret és rutinműveletek
4.	Szinusztétel	*Felidézett ismeret*: a háromszög területe.	A geometria, az analízis és az algebra	Új ismeretek feldolgozása; szemléletesség	Új ismereteket	Új összefüggés felfedeztetése	táblai rajz, levezetés Tk., Fgy.	A háromszög területére: integráció és

		Új ismeret: összefüggés a háromszög szögei és a szemben lévő oldalai között. Házi feladat: gyakorló feladatok.	szintetizálási képessége		feldolgozó óra; frontális, páros és egyéni munka	, a háromszög területképleté-ből származtatható további össze-függések		komplex megoldások, a szinusztételre: tényismeret és rutinműveletek
5.	Koszinusztétel	A háromszög fontos adatainak kiszámítási lehetősége, pl. 3 oldal vagy 2 oldal és az általuk bezárt szög, ill. további esetekben. Házi feladat: gyakorló feladatok.	Az analizáló és a szintetizáló gondolkodás fejlesztése	Motiválás, új ismeretek feldolgozása; rendszeresség, gyakorlás	Új ismereteket feldolgozó óra; frontális és csoportmunka	A vektorműveletek és az algebrai műveletek közötti kapcsolat felismertetése	Táblai rajz, levezetés Tk., fgy.	A tényismeret és a rutinműveletek elsajátíttatása
6.	Gyakorló feladatok	Egyszerűbb feladatok a két tétel helyes felírására és a szükséges számítások hibátlan elvégzésére. Házi feladat: hasonló feladatok.	A biztos számolási képesség kompetenciája, kooperáció	Alkalmazás, gyakorlás, rögzítés	Gyakorló óra; csoportos, páros, egyéni munka	egymás inspirálásával megoldási ötleteket nyerni, kölcsönösen kontrollálni egymás számításait	Tk., Fgy	rutinműveletek
7.	Gyakorló feladatok	Helyes tételválasztás, helyes tételfelírás. Házi feladat: hasonló feladatok.	A felismerési, azonosítási képesség mellett a biztos számolási	Alkalmazás, gyakorlás, rögzítés; rendszeresség	Gyakorló óra; csoport-, páros, egyéni munka	Egymás inspirálásával megoldási ötleteket nyerni,	Tk., fgy.	Rutinművelete k, integráció, komplex megoldások

			képesség kompetenciája, kooperáció			kölcsönösen kontrollálni egymás számításait		
8.	Addíciós formulák	Két szög összegének és különbségének szinusza, koszinusza, tangense, a kétszeres szögek szögfüggvényei Házi feladat: számítások „alapszögekkel”	Pontos szabálykövetés , deduktív gondolkodás	Ismeretfeldol-gozás, alkalmazás; a szemléletesség aktivizálás	Új ismereteket feldolgozó óra; frontális és páros munka	Az előzetes tudás áttekintése tanári irányítással	A bizonyított összefüggé-sek rögzítése és nagyméretű transzparens re való kiírása	Tényismeret
9.	Alkalmazások, gyakorlás	„Gyakran előforduló” szögekre való alkalmazás Házi feladat: saját feladat készítése a megadott szempontok szerint	A felismerési, azonosítási képesség mellett a biztos számolási képesség kompetenciája, kooperáció	Ismeretfeldol-gozás, alkalmazás, gyakorlás; aktivizálás, rendszeresség	Gyakorló, készségfej-lesztő óra; páros és egyéni munka	Páros megbeszélés, elakadás estén konzultáció kérhető	Kiosztott feladatlap	Rutinművelete k, integráció
10.	Trigonometrik us egyenletek	Egyenletek megoldása, amelyekben az ismeretlennek valamelyik szögfüggvénye szerepel. A függvények	Azonosító és adaptációs kompetencia	Új ismeretek feldolgozása, a meglevők adaptálása; fokozatosság, szemléletesség	Új ismereteket feldolgozó óra; frontális óra	Tanári magyarázat	Körző, vonalzó, tankönyv	Tényismeret, modellalkotás

		periodikussága miatt a végtelen sok megoldás fogalmának elmélyítése. Házi feladat: trigonometrikus „alapegyenletek”.						
11.	Trigonometrikus egyenlőtlensé-gek	Egyenlőtlenségek megoldása, amelyben az ismeretlennek valamelyik szögfüggvénye szerepel. A függvények periodikussága miatt a megszokottól eltérő megoldáshalmazok fogalmának elmélyítése. Házi feladat: trigonometrikus „alapegyenlőtlensé gek”.	Azonosító és adaptációs kompetencia	Új ismeretek feldolgozása, a meglevők adaptálása; fokozatosság, szemléletesség	Új ismereteket feldolgozó óra; frontális óra	Tanári magyarázat, egyéni ötletgyűjtés	Körző, vonalzó, tk.	Tényismeret, modellalkotás
12.	Rendszerezés, összefoglalás	A témakörben felidézett (korábbi) és a most tanult ismeretek rendszerezése, az	Rendszerben gondolkodás, szintetizálás	Motiválás, ismétlő rendszerezés, rögzítés;	Új ismereteket feldolgozó óra;	Tanári összefoglaló, kérdésfelvetés, konzultáció	Próbateszt	Integráció, modellalkotás, komplex megoldások

		esetleges hiányosságok kiderítése, pótlása. Házi feladat: a próbateszt befejezése.		fokozatosság, rendszeresség, visszacsatolás	frontális óra, konzultáció			
13.	Témazáró dolgozat	Szummatív teszt.	Reprodukálás, problémameg-oldó gondolkodás, rendszerben gondolkodás, szintetizálás		Ellenőrző óra			Integráció, modellalkotás, komplex megoldások
14.	Értékelés	A témazáró teszt eredményének, a témakör során előforduló esetleges gondolkodási műveleti és motiválási nehézségeknek a megbeszélése.	Kritikus gondolkodás, kooperáció, kommunikáció	Értékelés, motiválás, kondicionálás	Értékelő óra; plenáris konzultáció a tanár vezetésével	Értékelés utáni kétoldalú kérdéseken alapuló konzultáció		Kommunikáció

Óraterv 1. óra – Háromszögek, négyszögek, sokszögek

A pedagógus neve: XY

Műveltségi terület: matematika

Tantárgy: matematika

Osztály: 9. a matematika tagozatos csoportja

Témakör: háromszögek, négyszögek, sokszögek

Az óra témája: A háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti összefüggések

Az óra cél-és feladatrendszere:

A fejlesztendő attitűd: A felidézni tudás öröme

Fejlesztendő készségek, képességek:

A bizonyítási, következtetési, rendszerezési képesség, a problémaérzékenység fejlesztése; a háromszögekről való ismeretek elmélyítése, bővítése, alkalmazni tudása; a feladatmegoldó képesség fejlesztése.

A tanítandó ismeretek:

Egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek és megfordítva, nagyobb oldallal szemben nagyobb szög és megfordítva.

Előzmények: Nevezetes szögpárok ismétlése, a háromszögek csoportosítása; nevezetes vonalai.

Az elérendő fejlesztési szint megnevezése:

Tényismeret, rutinműveletek, integráció.

Az óra didaktikai feladatai: feladatelemzés, alkalmazás, gyakorlás, elmélyítés.

Módszer: rávezetés, megbeszélés.

Munkaforma: pármunka, frontális.

Dátum: 2014. 03. 07.

Időkeret	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia				Megjegyzések
		Didaktikai feladat	Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	
6 perc	Oldjuk meg a feladatokat! Gyűjtsük össze a megoldás közben használt, már tanult, háromszögekre vonatkozó összefüggéseket! Tudnánk bizonyítani ezeket?	Ráhangolás, ismétlés,	Tanulói munka	Pármunka	Tankönyv 126. o. 1/e; 2/b; 5/a.b; 6/c	A párok munkáját figyelem, segítem, ha kell
3 perc	Egyeztetjük az eredményeket	Ellenőrzés	Megbeszélés	Frontális munka		
4 perc	A felismert tételek megfogalmazása	A tapasztalatok összegyűjtése	Megbeszélés	Frontális munka	Táblai rajz	Háromszög-egyenlőtlenség, belső, külső szögösszeg, külsőszög-tétel
7 perc	A tételek bizonyítása-ötletek. Egyet kidolgozunk, a többi házi feladat	Rögzítés	Megbeszélés	Frontális munka	Táblai rajz	Ha nem sikerül egyedül, „segítő” vonalat húzok
5 perc	Feladatmegoldás Ezeknél a feladatoknál használtunk-e újabb összefüggéseket?	Motiválás	Megbeszélés	Pármunka	Tankönyv 126. o. 7/b; 9/a	Előzetes
13 perc	a=b↔ἀ=ß; a<b↔ἀ<ß bizonyítása	Ismeretbővítés	Megbeszélés, tanári magyarázat	Frontális munka	Táblai rajz	Fontos a szép ábra

		szokatlanabb (Indirekt) bizonyítási módszer gyakorlása logikai kapcsolatok kiemelése				
5 perc	Mi volt a legfontosabb ma? Házi feladat adása	Ismétlés	Megbeszélés	Frontális munka	Geom Fgy. III. 88., 98., 118., 132.	

Óraterv 2. óra háromszögek, négyszögek, sokszögek

A pedagógus neve: XY

Műveltségi terület: matematika

Tantárgy: matematika

Osztály: 9. a matematika tagozatos csoportja

Az óra témája: feladatmegoldás a háromszögekkel kapcsolatban, szerkesztési feladatok

Az óra cél-és feladatrendszere:

A fejlesztendő attitűd:

A választás lehetősége, szép ábrák készítése.

Fejlesztendő készségek, képességek:

A háromszögekről való ismeretek elmélyítése, bővítése, alkalmazni tudása.

A kritikai, az együttműködési, a kifejező képesség fejlesztése.

A feladatmegoldó, a bizonyítási képesség fejlesztése.

A problémareprezentáció, a tervezési képesség, a szerkesztési, kivitelezési készség fejlesztése.

Elérendő fejlesztési szint:

Alkalmazás, problémamegoldás.

Előzmények: Alapvető szerkesztési ismeretek

Az óra didaktikai feladatai:

Alkalmazás, visszacsatolás, differenciálás.

Módszer: Munkáltatás, kooperatív módszer, megbeszélés, differenciált fejlesztés, a tanulók kapnak kijelölt feladatot, de van választási lehetőségük is.

Munkaforma: jellemzően párban dolgoznak, de ha úgy látom jónak, vagy sokaknak gondot okoz valamelyik feladat, vagy ki szeretnék emelni valamit, akkor megbeszélés, frontális munka.

Dátum: 2014. 03. 10.

Időkeret	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia				Megjegyzések
		Didaktikai feladat	**Módszerek**	**Tanulói munkaformák**	**Eszközök**	
8 perc	A házi feladatok ellenőrzése, a táblánál ismerteti valaki (a 132-est mindenképpen)	Ellenőrzés	Megbeszélés, önként vállalkozó előadó	Frontális	G. fgy. 88.98.118.132.	Fontos a szép kivitel
8 perc	Mindenki kihúz egy elkészített papírcsíkot egy múlt órai tétellel, magában végiggondolja a bizonyítását, majd a párok egymásnak elmondják, végül röviden beszámolnak arról, hogyan ment a párjuknak a bizonyítás, mennyire volt precíz a szóhasználat, majd 0-6 ponttal értékelik egymást	Ismétlés, ellenőrzés, egymás értékelése	Önálló munka, majd megbeszélés	Egyéni munka, pármunka		Végig figyelem, hogyan mennek a bizonyítások
6 perc	Feladatmegoldás mindenkinek Geom. fgy. III. 245., 250.	Gyakorlás A szerkesztéseknél fontos annak hangsúlyozása, hogy mikor tekintünk adottnak egy háromszöget	Önálló munka	Egyéni munka	Geom. fgy., vonalzó, körző	Szerkesztés
8 perc	A feladatok megbeszélése, a 250-esnél a szerkesztés menete a táblára kerül	Rögzítés	Megbeszélés, magyarázat	Frontális	Táblai rajz, vonalzó, körző	Fontos feladat

15 perc	Választani lehet a következő feladatokból: könnyebb feladatok: 115., 117., 239., 243. nehezebb feladatok: 116., 119., 129., 153., 253.	Alkalmazás, gyakorlás	Tanulói munka	Egyéni munka	Füzetben	
1 perc	Házi feladat: be kell fejezni a választott feladatcsoportot, ezen kívül a 251.	Rövid értékelés a szerkesztésekkel kapcsolatban	Megbeszélés	Frontális		

Óraterv 3. óra háromszögek, négyszögek, sokszögek

A pedagógus neve: XY

Műveltségi terület: matematika

Tantárgy: matematika

Osztály: 9. a matematika tagozatos csoportja

Az óra témája: Pitagorasz tétele

Az óra cél-és feladatrendszere:

A fejlesztendő attitűd:

A meglévő tudás fejlesztése.

Fejlesztendő készségek, képességek:

A következtetési képesség erősítése.

Az alapfeladatok rögzítése.

Az analizálás, a szintetizálás képességének fejlesztése.

A feladatmegoldó képesség fejlesztése.

Az elérendő fejlesztési szint:

Biztos alkalmazás az alapfeladatoknál.

Előzmények: A 7. osztályban tanult Pitagorasz-tételt terület-, térfogatszámításnál gyakran alkalmaztuk.

Az óra didaktikai feladatai:

Rutinerősítés, magasabb szintre jutás az alkalmazásban.

Tantárgyi kapcsolatok: technika, fizika.

Dátum: 2014. 03. 10.

Időkeret	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia				Megjegyzések
		Didaktikai feladat	**Módszer**	**Tanulói munkaformák**	**Eszközök**	
10 perc	A házi feladatok ellenőrzése, a táblánál ismertetik az önként vállalkozók a 4 feladat megoldását	Ellenőrzés, diszkutálás	Megbeszélés, önként vállalkozó előadó frontális	Frontális	Táblai rajz	A szerkesztés menetének leírása, vázlat, diszkutálás
5 perc	Szögei szerint milyenek a következő háromszögek, ha adataik: a) a = 4 cm; b = 4 cm; m_c = 2 cm b) a = 5 cm; b = 12 cm; c = 13 cm A b) résznél a derékszögű háromszög jön válaszként. Honnan tudjuk? Fordítva is igaz az ismert állítás?	Ismétlés, alkalmazás, rávezetés	A táblára írom a feladatot, kis gondolkozás után megbeszéléssel oldjuk meg.	Frontális	Táblai rajz	A 30°-os, a 60°-os és 90°-os háromszögek tulajdonságai
		Állítás és megfordítása, különbségének hangsúlyozása	Megbeszélés	Frontális	Táblai rajz	
8 perc	A tétel bizonyításának felidézése, a megfordítás megfogalmazása	Rögzítés	Megbeszélés, magyarázat	Frontális	Táblai rajz	Emlékeznek-e a „darabolós”bizonyításra
16 perc	Feladatok: G. fgy 1330., 1340., 1349., 1365., 1396., 1410.	Alkalmazás, gyakorlás, a rutin felelevenítése, alapfeladatok: a rombusz átlói, az érintőszakasz, a húrtrapéz magasságának meghatározása	Önálló feladatmegoldás	Egyénileg, de lehet a párral konzultálni		Még mindig meglepő feladat az 1330., a többi fontos alapfeladat
5 perc	Az eredmények ellenőrzése, az 1410-es feladat részletes megbeszélése	Értékelés	Megbeszélés	Frontális	Táblai rajz	
1 perc	Hf .: fgy.1329–1330.; 1336–1342.	Ráhangolás	Útmutatás			

Reflexió A háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti összefüggések 1. órájához

Az 1. óra témája: a háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti összefüggések.

Az órán a feladatmegoldás mellett fő célként ismételtük a hetedikben már tanult háromszögekre vonatkozó tételeket, másrészt újabb tételeket mondtunk ki és bizonyítottunk. Kilencedikben, különösen a tagozatos csoportoknál, határozott igény alakult ki az állítások bizonyítására, a többlépcsős gondolatmenetek megértésére, megalkotására. Ennek fejlesztését tűztem ki célul.

A feladatokat könnyen megoldották, néhányuknak talán túl könnyűek voltak, de ők a tételek megtalálásával és bizonyításával foglalkozhattak, és gyorsan el is kezdtek ezzel foglalkozni. A pármunka ahhoz segített, hogy ne maradjanak le a lassabban haladók. A tételekre emlékeztek, a bizonyítások nehezebben mentek, végül Márk a belső szögösszegre még egy bizonyítást adott. Határozottan élvezték a munkát. Attól tartok, hogy nem mindenki tudja otthon majd felidézni a rajzai alapján a bizonyításokat, ezért ezt feltétlenül ellenőrizni kell.

Talán a nemrégen hallott Lénárt István gömbi geometriát bevezető előadására utalhattam volna a háromszög szögösszegénél, majd a következő órán, illetve tartunk majd egy-két „geometriaórát a gömbön”.

Az utolsó két feladatot természetesen megoldották, de a felhasznált állítások (a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, és megfordítva) igaz voltát természetesnek vették, és csak a provokatív „Miért is van ez így?” kérdés után töprengtek csak el. A bizonyítások gondolata nem könnyű, az indirekt módszer kétszer is előkerül. Másodszorra többen is ügyesen alkalmazták.

Reflexió A háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti összefüggések 2. órájához

A 2. óra témája: feladatmegoldás a háromszögekkel kapcsolatban, szerkesztési feladatok.

Talán túl sok volt a házi feladat, mert több diák nem tudta teljesen megoldani, sokaknál nem volt szép az ábra, amit a bizonyításoknál használtak, követhetetlen volt a gondolatmenet, csak az ábrát használták bizonyításul. Azt gondoltam a múlt órán (egy-két füzetet alapul véve), hogy az órán sikerült már a bizonyításokat leírni, de ezt nem igazán mértem fel jól. Így túl sok volt az elvégzendő feladat, amit persze szelektáltak.

A tételek ellenőrzésekor az derült ki, hogy egyes tételek (az egyenlő oldalakkal egyenlő szögek vannak, és megfordítva, valamint a nagyobb oldallal nagyobb szög van, és megfordítása) egyeseknél egyáltalán nem mentek, a párjuk 1 pontosra értékelte a bizonyítást. Mindenképpen vissza kell rá térni. Bár az érettségin nem követelmény a tételek kimondása és bizonyítása, a matematikai építkezés végiggondolása, a bizonyítási módszerek, a következtetni tudás, egy érvelés helyességének eldöntése szempontjából fontosnak tartom a megjelenésüket, a számonkérésüket.

A páros „kikérdezés” jó módszernek bizonyult, mindenki számot tudott adni a tanult dolgokról. Nem gondoltam, hogy én is egyenként értékelem a teljesítményt, majd sor kerül rá később.

A szerkesztési feladatok nem igazán hangsúlyos elemei az érettségi feladatsoroknak, talán nem is fordult elő az utóbbi 20 évben ilyen feladat. Ennek ellenére a következetesség, a modellalkotás, a tervezés folyamatának tanulásához nagyon hasznosak ezek a feladatok. Segítik a gondos, pontos, kitartó munkára nevelést. És milyen szépek az igényesen elkészített ábrák!

A 250-es feladat gondolatával nem találkoztak még a diákok, önállóan nem tudták megoldani, (tulajdonképpen számítottam erre), és segítenem kellett a kerület vázlatrajzon való megjelenítését. Kihajtogattuk az oldalakat, megvizsgáltuk a kapott háromszöget. Ezután könnyen folytatták a megoldást. A következő feladatokra nem volt elég idő, elszámítottam magam a tervezésnél. Azonban a választás lehetőségével okosan éltek, reálisan tudták megítélni az adekvát feladatokat. A 250-es feladat ötletét ügyesen használták föl. A következő órán a táblánál be fogunk mutatni több feladatot, megfelelő időt szánva erre. Az óra lényeges részeit (a tételek ismétlését, az újszerű szerkesztési gondolatot) megvalósítottuk, jól dolgoztak a diákok.

Hospitálási napló

A pedagógus neve: XY (írásos engedélyt adott a hospitálási napló portfóliómba történő feltöltésére)

Az óralátogatás helye: ………… Gimnázium

Műveltségi terület: matematika

Tantárgy: matematika

Az óra témája: a kerületi és a középponti szögek tétele; látókör – vegyes feladatmegoldás

Az osztály: 9. c osztály (6 évfolyamos speciális matematika tagozat) egyik csoportja

Az óralátogató neve: (a portfólió készítője)

Dátum: 2014. október 2.

Idő	Az óra menete	Megjegyzések
9 óra 3 perc	A tanár a becsöngetés előtt felírja a megbeszélendő feladatok sorszámát.	Formalitások nincsenek az óra elején, a gyerekek a csöngetéskor a helyükre ülnek; csendben vannak. (*Év elejétől valamennyi megoldandó feladatnak sorszáma van: így könnyebb visszakeresni, hivatkozni rájuk, később új eszközökkel és módszerekkel új megoldást keresni*.)
9.10	A 9. sorszámú feladat megoldását egy gyerek ismerteti, de a tanár írja a táblára, majd a megbeszélést követően egyszerűbb megoldást mutat. Egy fiú folyamatosan, magas hangon kommentálja a történteket, megszólalásai a tárgyhoz kötődnek, úgy viselkedik, mintha egyedül lenne. Néha dallamot dúdol.	Rendezetten kerül fel a táblára a bonyolult megoldás (a felírásból kiderül, hogy nem minden esetet vizsgált a diák). A tanár felhívja rá a figyelmet, és kiegészíti. A folyamatosan beszélő gyerekről a tanár csak akkor vesz tudomást, amikor az órát előrevivő megjegyzést tesz. Végtelen nyugalommal és türelemmel kezeli a helyzetet. A társak figyelmen kívül hagyják a „zavaró tényezőt”. (*A tanárok és a diákok elmondása szerint nagyon okos, magát fegyelmezni nem tudó, különös bánásmódot igénylő gyerek*.)
9.12	A tanár a feladattal összefüggésben definiálja a látókör fogalmát. A Thalész-kört mint speciális esetet a gyerek mondja.	*Nem hangsúlyozza a tanár, hogy a szakasz két végpontja kimarad!* Kitér a szerkesztés módjaira is.
9.15	A 10. feladattal foglalkoznak. (Házi feladat volt.) Egy gyermek ismerteti, a tanár minden pontatlan kifejezésre rákérdez.	A hangsúly a megoldásszám meghatározásán van! A tanár kiegészíti az elhangzottakat.

9.20	A 11. feladat – házi feladat volt (érdekes, figyelemfelkeltő szöveg: Indiana Jones tájékozódni akar a mezőn, három pont a tereptárgy helyének ismeretében)	A tanár lendületesen, a gyerekek figyelmét folytonosan fenntartva kiegészít, pontosít.
9.32	Gondolkodni való: Mindig van metszéspontja három látókörnek?	Vannak, akik azonnal mondják a metszéspontok lehetséges számát: a tanár felvázolja a lehetőségeket a gyerekek ötletei alapján.
9. 37	Gondolkodni való (13. feladat): Honnan lehet a legjobban szabadrúgást lőni? Honnan lehet a legjobban látni a mozivásznat?	„Ha tudsz matematikai modellt a «jó»-ra, elfogadom!” (*Természetes módon kérdez rá a lényegre, irányítja a gyerekeket a modellalkotás felé.*)
Az óra végéig	A diákok önállóan vagy párban dolgoznak a még meg nem oldott feladatokon, a tanár újabb feladatokat ír fel a táblára, és összefoglalja a még meg nem oldott problémákat. (Mi a kötelező házi feladat, melyek azok a feladatok, amelyeken „csak gondolkodni” kell.)	A tanár járkál a padok között, és azt erősíti meg, azt lendíti tovább, aki igényli. A gyerekek – választásuk szerint – az öt feladat valamelyikén dolgoznak, a tanár minden gyerek munkáját azonnal átlátja.

Összes ségé- ben:	Az órán igazi, a speciális matematika tagozatos osztályok óráira jellemző „műhelymunka” folyt. A pedagógus tökéletes szakmai biztonsággal tartotta kézben – a gyerekek kreativitása és ötletessége, olykor türelmetlensége miatt – a gyors tempójú, végig rendkívül mozgalmas, változatos munkát. Mindenki dolgozott. Az óra nélkülözött minden formális, a frontális munkára általában jellemző elemet. A pedagógus és a diákok összhangja oldott, de a kölcsönös tiszteleten alapuló kapcsolata mindvégig érezhető volt. *A fiatal kolléga tapasztalatlansága mindössze abban nyilvánult meg, hogy túl sok feladattal foglalkozott egy órán, így a precíz leírásra, ill. annak ellenőrzésére, hogy a gyerekek füzetébe minden fontos elem bekerült-e, nem jutott idő.* Ugyancsak a tartalmi gazdagság áldozata lett a látókör pontos definíciójának elmaradása. Tudása, módszergazdagsága, a tudás átadására való képessége (a problémák lebontásának képessége), a gyerekeket elfogadó magatartása, türelme, igényes humora példaértékű. Jól ismeri tanítványait annak ellenére, hogy csak egy hónapja dolgozik velük. Az osztályt az első két évben tanító kollégáitól minden fontos információt megszerzett a gyerekekről, tanulási tempójukról, a matematika tanulására vonatkozó attitűdjükről. Nagy gonddal készült fel a csoport tanítására. Ez minden megnyilvánulásán meglátszott. Összességében: kiváló tanárszemélyiség, ígéretes tehetségű gyerekekkel, eredményes, szakmailag korrekt, a figyelmet végig ébren tartó színes, változatos, tartalmas órát tartott. Fiatal kora ellenére bebizonyította, hogy a laza, formalitások nélküli órán is megadják a gyerekek a kellő tiszteletet tanáruknak, ha ezt a tiszteletet tudásával és rájuk figyeléssel kivívja.

Budapest, 2014. október 2.

………………………………….. ………………………………….

XY HV

látogatott pedagógus látogató pedagógus

Tanulói kutatómunka az XY Gimnáziumban

(Megjelent a Pázmány Péter Katolikus Egyetem matematika-fizika CD-jén 2012 októberében.)

A középiskolai kutatómunkának nincs nagy hagyománya a hazai oktatásban. Csermely Péter professzor kezdeményezésére a ’90-es évek végén indult egy mozgalom, amelyben tehetséges fiatalok neves tudósok mellet kapcsolódhattak be kutatómunkába. Ez azonban még nem a középiskolában folyó munka volt, csak innen delegálták a tanulókat. 2005 szeptemberében írta ki először a Tempus Közalapítvány az *Út a tudományhoz* pályázatot középiskolás tanulók részére.

Az az igazság, hogy akkor fenntartásokkal fogadtam a hírt, mert szaktanácsadóként láttam, hogy az általános és középiskolákban sorra szűnnek meg a szakkörök és néhány helyen a megyei és regionális szakkörök is. Ekkor már igen hosszú ideje nem kaptak az iskolák semmilyen támogatást tehetséggondozásra. A sorozatos megszorítások következtében természetesen nem a kötelező feladatokat, hanem pl. a tehetséggondozási fórumokat csökkentették vagy szüntették meg. Én annak örültem volna, ha az új tehetségfejlesztési lehetőséggel: a tanulók kutatómunkába való bevezetésével párhuzamosan szakkörök működésére, szakmai anyagok összeállítására is lehetett volna pályázni. Az a véleményem, hogy a hagyományos tehetségfejlesztési módszerek alapfeltételét jelentik a kutató jellegű munkának is.

A hagyományos szakköri munkának iskolánkban, a Z Gimnáziumban régóta fontos szerepe van a tehetséggondozásban. Tanulóink több szinten találkozhatnak a középiskolai tananyagot meghaladó ismeretekkel. Már általános iskolás koruktól részt vehetnek a gimnázium által szervezett szakkörökön. A 6–8. osztályosoknak már több mint 20 éve tartunk öt csoportban szakköröket. Ősszel nyolcadik osztályosoknak matematika szaktáborokat szervezünk kiváló meghívott előadókkal. PL, JP, PL, KJ, KNE, KK vezetett foglalkozásokat tanítványainknak és a régió 8. osztályos tanulóinak. A gimnáziumba kerülve két osztályban emelt szinten tanulják a matematikát, és ezt szakkörök, meghívott előadók előadásai egészítik ki. Iskolánkban szervezzük a 11–12. évfolyam megyei matematika és a régió diákolimpiai szakkörét. A 10 évfolyam legjobbjainak tavasszal a brüsszeli 1. sz. Európa Iskolával közös matematikatábort szervezünk, és ősszel Brüsszelben vesznek részt hasonló táborban. Valószínűleg az országban egyedülálló, hogy az ún. Csillag Program keretében a legjobb 11–12.-es tanulók részére kiscsoportos (2-3 fős) foglalkozásokat tartunk délelőtti órarendben, helyben kidolgozott speciális tehetségfejlesztő tananyaggal.

Az utóbbi évtized sorozatos megszorító intézkedései ellenére is fenntartottuk, sőt folyamatosan fejlesztettük ezt a gazdag szakmai kínálatot. A sokirányú, folyamatos tehetségfejlesztő munka eredményeként tanulóink sikeresen szerepelnek a regionális és országos versenyeken. Példaként két kiemelkedő eredményt említek: a KöMaL pontversenyében évek óta iskolánk szerepel a legnagyobb megoldói létszámmal és a Fazekas Gimnázium után a legmagasabb pontszámmal; a matematika OKTV-n pedig 2009-ben egy II. és egy IV. helyezett tanulónk volt. (Korábban volt olyan is, amikor az I. és II. helyezett is városunk diákja volt.) Legalább ilyen fontos, hogy tanulóink igen széles rétegének van sikerélménye matematikaversenyeken, 2010-ben is 11 tanulónk jutott az OKTV, 31 tanuló pedig az Arany Dániel matematikaverseny II. fordulójába. Az elmúlt évtizedek szakmai munkájának színvonalát pedig jól jelzi az, hogy az ország legfiatalabb akadémikusa és a legfiatalabb akadémiai doktor is iskolánk tanítványa volt.

A hagyományos szakköri tevékenységek mellett a tanulók kutatásra való felkészítésének is volt már előzménye iskolánkban. A 80-as években a szegedi egyetemen dr. PL tanár úr szervezett ún. olvasótáborokat, mondván: a tehetséges tanulók felkészítésében a versenyekre való gyakoroltatás mellett szerepet kell, hogy kapjon a tanulók szakirodalomban való tájékozottságának növelése. Jó, ha már középiskolában kialakul a szakirodalom önálló keresésének, olvasásának igénye. Néhány tanítványunk rész vett ezekben a táborokban, és én is elkezdtem gyűjteni magyar, angol és német nyelvű cikkeket, amelyeket érdeklődő, tehetséges tanítványaimnak a kezébe adhattam. Természetesen ez még nem kutatás, de ösztönöztem tanítványaimat arra, hogy a kapott cikkekkel kapcsolatos témákban maguk is keressenek további információkat, próbáljanak meg kérdéseket megfogalmazni az adott témakörben, keressenek kapcsolódási pontokat más rokon témakörökkel.

A tanulók számára a legszimpatikusabb terület a számelméleti függvények témaköre volt. Különösen érdekesnek találták a $\sigma(n)$ osztók összege függvény vizsgálatát, illetve sokszor célszerűbb a már a görögök által is használt $s(n) = \sigma(n) - n$ függvénnyel megfogalmazni az állításokat. Az $s(n)$ tehát megadja az n szám nála kisebb osztóinak összegét.

Nyilván nem véletlen, hogy Gombos Lászlónak, volt tanítványunknak már egyetemista korában ebben a témakörben jelent meg cikke (Gombos László 1998. A sigma(n)/n sorozatról. *POLYGON* 2. Szeged.).

A $\frac{\sigma(n)}{n}$ *sorozatról* címen ($n = 1, 2, \dots$), amelyben bebizonyította, hogy a címben jelzett sorozat elemei az $[1, \infty[$ intervallumon mindenütt sűrűn helyezkednek el.

Régóta szívesen kutakodnak tanítványaink ebben a témakörben, főként mert nagyon sok olyan érdekesség mutatható be, amelyek megértéséhez nem kell sok előismeret.

– Ilyenek a tökéletes számok, amelyekre $\sigma(n)=2n$, ill. $s(n) = n$. Azaz egy n természetes szám tökéletes, ha megegyezik nála kisebb osztóinak összegével: pl. $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ stb. A görögök négy ilyet ismertek, az újabb tökéletes számok keresése végigkísérte a matematika történetét. Euler találta meg a 8. tökéletes számot, és megmutatta a páros tökéletes számok kapcsolatát a $2p - 1$ alakú, ún. Mersenne-prímekkel. A számítógépek feltalálásáig összesen 12 tökéletes számot ismertek, ezután felgyorsult a keresés, de a mai napig (2010. augusztus) is csak 47 tökéletes számot ismerünk. A legnagyobb, P = 243,112,608 (243,112,609 − 1), közel 26 millió jegyű, és 2008. augusztus 23-án találták.

– Az *n* és *m* természetes számok barátságos számok, ha mindegyik megegyezik a másik nála kisebb osztóinak összegével, azaz s(n) = m; s(m) = n. Pl. a (220; 284) számpár tökéletes, mert a 220 osztóinak összege 284, és a 284 osztóinak összege 220. A görögök csak ezt az egyetlen barátságos számpárt ismerték. A XVIII. század elejéig is csak három új párt találtak, de itt nem kellett a számítógépek felfedezéséig várni a nagy ugrással. Euler 1742-től 1750-ig újabb 61 párt talált! Az interneten található legfrissebb bejegyzés szerint 11 994 387 barátságos számpár ismeretes, a legnagyobb több, mint 24 000 jegyű.

Nem tudjuk, hogy van-e páratlan tökéletes szám.

– Az $n \to s(n)$ hozzárendelést folytassuk úgy, hogy a kapott számhoz rendeljük újra a nála kisebb osztóinak összegét:

$n \to s(n) \to s(s(n)) \to s(s(s(n))) \to \ldots$

Folytassuk ezeket az összegsorozatokat addig, amíg vagy 1-et kapunk vagy egy olyan számot, amely korábban már előfordult. Pl.: 11 → 1, 12 → 16 → 15 → 9 → 4 → 3 →1, 28 → 2,. 25 → 6 → 6, 220 → 284 →220. 1064 → 1336 → 1184 → 1210 → 1184,

12496 →14288 →15472 →14536 → 14264 →12496.

Milyen sorozatokat kaphatunk így?

A fenti példák már mutatják. hogy egy sorozat: végződhet 1-re; állhat egyetlen számból (ez alkot egyelemű ciklust); alkothat egy több számból álló ciklust; más számból indulva ciklusba jut. Milyen lehetőség van még? Előfordulhat, hogy a sorozat sosem ér véget, de nem is ismétlődik? A Catalan-sejtés azt mondja ki, hogy ez a lehetőség nem fordul elő egyetlen kiinduló természetes számnál sem, azaz mindegyiknél vagy 1-et kapunk, vagy periodikusan ismétlődő számsorozathoz (ciklushoz) jutunk.

Látható, hogy a tökéletes számok egyelemű, a barátságos számok kételemű ciklust alkotnak. Érdekesség, hogy háromelemű ciklust nem ismerünk. négyeleműből viszont eddig 142 ismert, míg öteleműből csak a fenti, 12496-tal kezdődőről tudunk, 6 eleműből ismerünk még ötöt, 8 eleműből kettőt, 9 és 28 eleműből egyet-egyet. Egyelőre ennyi ciklus ismert.

Vannak azonban olyan, viszonylag kicsi *n* kezdőszámok, amelyek nem vezetnek ciklushoz, de hosszú sorozat után érik el az 1-et. Pl. a 138-cal kezdődő sor 172 elemű, a sorozatban a legnagyobb elem 12 jegyű.

Vannak továbbá olyan *n* kezdőszámok, amelyeknél nem tudjuk, hogy a sorozatnak van-e vége. Emiatt nem tudjuk, hogy igaz-e a Catalan-sejtés. Az egy- és kétjegyű kezdőszámok mindegyikénél ismerjük a teljes sorozatot. A háromjegyű kezdőszámok között viszont már van öt olyan, amelyeknél nem tudjuk, hogy véget érnek-e.

A 276, 552, 564, 660, 966 számok (az ún. Lehmer-five) esetén az összegsorozatok olyan nagy számokhoz vezetnek, amelyeknél a következő elem kiszámítása több hónapot vesz igénybe. Mindegyik kezdőszámból indulva 150 jegyűnél nagyobb elemeknél tartanak. Pl. az 564-gyel kezdődő sorozatnak 3314 eleme ismert, és a legnagyobb 165 jegyű.

A fentiekben az $s(n)$ számelméleti függvényekkel kapcsolatos ismeretek közül csak néhány olyan elemet mutattam, amelyek érdekesek, felkelthetik az érdeklődést a témakör iránt. Fontos az is, hogy a fentiekkel kapcsolatosan sok-sok további kérdést lehet megfogalmazni.

I. Sok olyan kérdést, amelyre a tanulók maguk is megtalálhatják a választ. Pl.:

I/1. Ha n prímhatvány, akkor $s(n) < n$. (Tehát az ilyen n ún. hiányos szám.)

I/2. Ha n két páratlan prímhatvány szorzata, akkor $s(n) < n$.

(Így, ha van páratlan tökéletes szám, akkor annak legalább három törzstényezőjének kell lenni.)

I/3. Ha n egy tökéletes szám többszöröse, akkor $s(n) > n$.

(Tehát az ilyen n ún. bővelkedő szám.)

I/4. Ha $n = 2k$, akkor $s(n) = n – 1$.

I/5. Ha valamely n páratlan számra $s(n) = n – 1$, akkor n négyzetszám!

I/6. Ha p olyan prím, amelyre $2p – 1$ is prím (ún. Mersenne-prím), akkor $n = 2p – 1(2p – 1)$ tökéletes szám.

I/7. Ha az n páratlan szám és $n \equiv 3 \pmod 4$, akkor $\sigma(n) \equiv 0 \pmod 4$, $s(n) \equiv 1 \pmod 4$, tehát n nem lehet tökéletes.

II. Olyan kérdésekkel is találkozhatunk, amelyekre a jobbak is csak segítséggel tudják megtalálni a válaszokat. Pl.

II./1. Ha n páros tökéletes szám, akkor $n = 2p – 1(2p – 1)$, ahol $2p – 1$ prím.

(Tehát a fenti összefüggés a páros tökéletes számok és a Mersenne-prímek között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít.)

II/2. A $\frac{\sigma(n)}{n}$ függvény tetszőlegesen nagy értékeket is felvesz.

II/3. Nincs olyan $4k - 1$ alakú p szám, amelyre p osztója egy $n2 + 1$ alakú számnak.

II/4. Nincs olyan páros n, hogy $s(n) = n + 1$.

(Erre a középiskolában nehéznek tekinthető tételre az előző II/3. tétel felhasználásával sikerült bizonyítást találni GyL és SzL tanítványunknak.)

III. Témánk szempontjából az a legfontosabb, hogy számos olyan kérdés vethető fel, amelynek megértése nem igényel komoly előtanulmányokat, de a válasz nem ismert. Itt felsorolok néhány ilyen egyszerűen megfogalmazható nyitott kérdést:

III/1. Van-e páratlan tökéletes szám?

(Ha van ilyen, akkor annak az I/7. szerint $4k + 1$ alakúnak kell lennie.)

III/2. Van-e végtelen sok tökéletes szám?

III/3. Van-e olyan páratlan n, amelyre $s(n) = n - 1$?

III/4. Van-e olyan páratlan n, amelyre $s(n) = n + 1$?

III/5. A kettő hatványain kívül van-e olyan páros n, amelyre $s(n) = n - 1$?

III/6. Létezik-e olyan páros n és páratlan m, hogy $s(n) = m$, $s(m) = n$?

(A legtöbb ismert barátságos számpár páros-páros, létezik néhány páratlan-páratlan is. Az a kérdés, van-e páros-páratlan számpár.)

III/7. Ha n és m barátságos számok és $n > m$, akkor milyen nagy lehet n/m?

(Az eddig ismert barátságos számoknál $n/m < 1{,}433$. Elvileg lehetne ennél nagyobb is, de nem tudjuk, mi a felső határ, vagy létezik-e ilyen?)

III/8. Létezik-e olyan $k, m, n \in N$ számhármas, hogy $s(k) = m$, $s(m) = n$, $s(n) = k$?

(Azaz létezik-e barátságos számhármas?)

Kutatási területnek azonban a III. pontban felvetett kérdések nem szerencsések a középiskolások számára, mert ezekben igen nehéz bármilyen új dolgot hozni.

A matematika és az informatika iránt érdeklődő tanulók számára olyan területek lehetnek vonzók és esélyt ígérők, ahol számítógépes programokkal lehet részeredményeket elérni, sejtésekre jutni. Pl. az utolsó néhány tökéletes számot nem szuperszámítógépekkel, hanem közönséges otthoni gépekkel találták. Volt, amelyiket középiskolás diák találta. Ha már kérdezni tud a diák a témakörben, akkor programok segítségével megsejtethet válaszokat. Pl. nagyon egyszerű kérdés, hogy egy adott (nagy) N számig milyen arányban vannak azok az n-ek amelyekre $s(n) < n$ (az ún. hiányos számok), ill. azok, amelyekre $s(n) > n$ (az ún. bővelkedő számok). (A tökéletes számok, tehát azok, amelyekre $s(n) = n$, elenyésző kisebbségben vannak.)

Számelméleti vizsgálataink támogatására iskolánk vásárolt egy *Mathematica 6.0* nevű programot, amelynek segítségével azt vizsgáltuk, hogy a bővelkedő számok száma egy bizonyos „N”-ig hogyan aránylik az N számhoz. Az eredmények azt sejtették, hogy létezik egy határérték, amelyhez a bővelkedő számok aránya tart. Számításaink szerint ez a határérték megközelítőleg 0,2475. Később informálódtunk, hogy Marc Deléglise francia matematikus a közelmúltban bebizonyította, hogy a keresett érték a] 0,2474; 0,2480[intervallumba esik.

Így hát ezek a próbálkozások valóban jó sejtéshez vezetnek, de egy már bizonyított tételt utólag megsejteni szintén nem tekinthető eredményes kutatómunkának. Szerencsére a témával kapcsolatosan volt egy olyan ötletünk, amelynek eredményei (középiskolás szinten) valóban kutatómunkának tekinthetők. Tekintsük át ezt a folyamatot!

Néhány éve iskolánkban rendeztük a Kutató Diákok Regionális Konferenciáját (TUDOK). BT 12. osztályos tanulónknak javasoltam a számelmélet témában való indulást, de ezt még önálló kutató jellegű munka nem előzte meg. A fentebb ismertetett érdekességekből gyűjtött össze egy 10 perces előadásra valót, természetesen úgy, hogy sok friss eredménynek utánanézett, és jól rendszerezte ezeket. Kiváló érzéke volt ehhez, jó előadó volt, és így be is jutott az országos döntőbe. Sajnos más versenye miatt nem tudott rész venni a döntőn. Ebben az előadásban éppen csak említésre került az a lehetőség, hogy az $s(n)$ függvény egy tulajdonságát titkosításra is fel lehetne használni. Mivel 12.-es tanulóval kezdtük a munkát, az év végén már nem került sor ezen ötlet kidolgozására. Az első nagy tanulság az volt, hogy bár csak 12.-esek azok, akik eséllyel indulhatnak TUDOK-konferencián, de a munkát legalább egy évvel előbb el kell kezdeni.

Ezután jelent meg 2005 őszén az *Út a tudományhoz* című pályázat, amelyben két 11.-es tanulóval, GyL-lel és SzL-lel kezdtünk el dolgozni ugyanebben a számelméleti témában. (Volt a csapatban két 12.-es is, de mire összeállt a kutatási téma, ők már inkább érettségire készültek.) Így a két tanulóval a következő őszre készült el egy TUDOK-on bemutatható prezentáció. Ez az anyag már három részből állt. Az első részben szintén a fenti érdekességekből, matematikatörténeti vonatkozásokból válogatott. A második részben a majdnem tökéletes számokkal, azaz olyan n számok vizsgálatával foglalkozott, amelyekre $s(n) = n - 1$, vagy $s(n) = n + 1$. Az elméleti dolgokhoz kiváló érzéke volt a két tanulónak. Ebben a témakörben sikerült egy bizonyítást találni a fentebbi II/3. és II/4. állításokra. A harmadik részben pedig felvázoltak egy titkosítási lehetőséget az $s(n)$ függvény segítségével. Az egész együtt rendkívül tartalmas prezentáció volt, mégsem jutottak be vele az országos döntőbe. Ennek sok oka lehetett.

Ekkor már olyan szinten foglakoztunk a témával, hogy feltétlenül külső szakember segítségére is szükségünk volt. FR-től, az ELTE Algebra Tanszékének tanárától kértünk támogatást a témánkhoz, aki éveken át sok hasznos javaslattal segítette a kutatásunkat.

A következő évben új tanulókkal folytattuk a kutatást. (Sajnos ez középiskolában így van. Legfeljebb két év az, ameddig egy diák részt tud venni a munkában. Az előző évek résztvevőivel természetesen tartottuk a kapcsolatot. Tanácsokat adtak az újaknak, és valamennyire ők is folytatták a gondolkodást a témánkban, sőt GyL ebből a témából írta BSC-s szakdolgozatát.) 2007 őszétől négy diákkal dolgoztunk. LÉ elsősorban az elméleti dolgokban volt járatos és nagyon jól adott elő. RN igen jól programozott. Ő volt az első a kutatásunkban, aki valóban komoly programozási ismeretekkel rendelkezett. PM az angol nyelvű szakirodalom tanulmányozásában volt jó, és választékosan, precízen írta le eredményeinket. EJ a prezentációk készítésében jeleskedett. Ezzel a csoporttal már a titkosítási problémákon volt a hangsúly. A kutatás lényegét a következőképpen tudom összefoglalni.

Elméleti alapok

A $\sigma(n)$ összeg n szám törzstényezős felbontásának ismeretében így adható meg:

Ha $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, akkor a szám pozitív osztóinak összege:

$$\sigma(n) = \left(1 + p_1 + p_1^2 + \dots p_1^{k_1}\right) \cdot \left(1 + p_2 + p_2^2 + \dots p_2^{k_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + p_r + p_r^2 + \dots p_r^{k_r}\right)$$

$$= \frac{(p_1^{k_1+1} - 1)}{(p_1 - 1)} \frac{(p_2^{k_2+1} - 1)}{(p_2 - 1)} \cdots\cdots \frac{(p_m^{k_m+1} - 1)}{(p_m - 1)} \quad (1.)$$

Ebből nyilván megadható $s(n)$ értéke is, hiszen $s(n) = \sigma(n) - n$.

A *σ(n)* és *s(n)* függvények vizsgálatakor felmerülő érdekes kérdés, hogy *σ(n)* és *s(n)* értékének ismeretében hogyan, milyen módszerek segítségével tudjuk visszakeresni *n*-t.

Az elsőre viszonylag egyszerű, átlátható módszer adható, míg a második probléma igen hosszadalmasnak tűnik.

Ha ismerem *σ(n)* értékét, akkor a *pi* helyére a prímszámokat, *ki* helyére a pozitív egészeket beírjuk, és *σ(n)*-t ezekhez tartozó $\frac{(p_i^{k_i+1}-1)}{(p_i-1)}$ tényezőkkel kell elosztanunk.

Tehát a 22 – 1, 23 – 1, …; (32- – 1) / 2, (33 – 1) / 2, … (52 – 1) / 4, (53 – 1) / 4, … számok *σ(n)*-nél kisebb értékeivel osztjuk *σ(n)*-t, majd ha osztható volt, akkor a hányadost. Így eljuthatunk egy megfelelő *n*-hez.

Általában tetszőleges *pi* esetén *ki* értékeit növelve $\frac{(p_i^{k_i+1}-1)}{(p_i-1)}$ gyorsan nő, ezért hamar eléri *σ(n)*-t, tehát gyorsan eldönthető, hogy *pi* szerepel-e *n* felbontásában.

Ez nagy *σ(n)* esetén ugyan nem túl gyors eljárás, de belátható időn belül eredményre vezet.

Az *s(n)* függvényből *n* meghatározására nagy *s(n)* értékek esetén nincsenek belátható időn belül elvégezhető eljárások. Még azt sem tudjuk ilyen egyszerűen eldönteni *s(n)* értékének ismeretében, hogy egy prím szerepel-e *n*-ben vagy nem. Tulajdonképpen nincs más lehetőségünk, mint végigpróbálni minden lehetséges *n*-t, hogy az adott *s(n)* tartozik-e hozzá.

Az előzőekből felmerülő kérdés, hogy egy adott *s(n)* ismeretében mekkora lehet *n* értéke.

Ha *n* nem prím, akkor *n*-hez viszonyítva *s(n)* a legkisebb, ha *n = p2*, ahol *p* prím.

Ekkor *s(n) = 1 + p*. A két egyenletből *n = (s(n) – 1)2*.

Tehát egy adott *s(n)* érték esetén *n ≤ (s(n) – 1)2*.

Ez pl. azt jelenti, hogy egy 20 jegyű *s(n)* esetén *n* nem lehet nagyobb 40 jegyűnél.

Ha a 40 jegyűekig minden *n*-t végig kellene próbálni, hogy az adott *s(n)* érték tartozik-e hozzá, akkor ez igen sokáig tartana. Pl. ha egy számítógép minden *n* esetén átlagosan 0,00001 s alatt döntené el, hogy az adott *s(n)* tartozik-e hozzá, akkor ez kb. 1028 (!) évig tartana.

Természetesen a próbálkozások száma csökkenthető különböző elméleti meggondolások alapján. Tudva azt, hogy *σ(n)* akkor és csak akkor páratlan, ha *n* négyzetszám, adódik, hogy

– ha *s(n)* páros, akkor *n* páros és nem négyzetszám vagy páratlan négyzetszám;

– ha *s(n)* páratlan, akkor *n* páros négyzetszám vagy páratlan és nem négyzetszám.

De ez, illetve további hasonló meggondolások csak kismértékben csökkentik a próbálkozások számát.

Következésképp elmondható: Az *n* és *s(n)* olyan párt alkot, ahol az egyikből (*n*) gyorsan megadható a másik [*s(n)*], visszafelé azonban nagyon lassan működik a dolog. Minden olyan művelet, ami egyik irányban viszonylag gyorsan kiszámolható, de ez a számítás visszafelé nagyon sok ideig tartana, alkalmas lehet titkosításra.

A titkosítási eljárás

Az [*n* – *s(n)*] számpárt olyan ún. borítékolt üzenetek titkosítására használjuk, ahol az elküldés pillanatában még nem szeretnénk, hogy a címzett el tudja olvasni az üzenetet (pl. egy sakklépés, árajánlat, fogadás vagy tőzsdei lekötés esetén), továbbá a borítékbontásig mi sem tudunk változtatni az üzeneten.

A kódolás lépései a következők:

1. A kódolandó üzenetet ASCII-kód segítségével átírjuk egy számmá, mivel az ASCII-kód minden karakterhez egy számot rendel hozzá, így egy többkarakteres szöveghez egy többjegyű számot rendel. Legyen ez a szám *n*.

2. Az *n* számhoz ezután (pl. a *Mathematica 6.0* alapon írt program segítségével) rendeljük hozzá az *s(n)*-jét. (Ezt a program egy kb. 50 jegyű *n* esetén egy-két percen belül elvégzi.) Ezt az *s(n)*-t küldjük el mint kódolt üzenetet (3. sz. melléklet).

A kódolás folyamata egy szemléletes példa segítségével:

Képzeljük el, hogy két személy interneten keresztül sakkozik egymással. A játékot valamilyen oknál fogva fel kell függeszteniük, de később folytatni szeretnék. Ekkor a soron következő játékos, hogy hosszabb idejű gondolkodásra ne legyen módja, illetve lépési szándékán változtatni ne tudjon, következő lépését borítékolja. Így a játék ezzel a borítékolt lépéssel fog folytatódni.

A borítékolás menete a következő:

(1) Kódolandó üzenet: B1-ről E4-re.

Ha rövid vagy véges eshetőségű üzenetet kódolunk (például egy sakklépést), szükséges töltelékszavakat is használnunk. Egyrészt kicsi *s(n)*-ből hamar meg lehet határozni *n*-t, másrészt, ha *s(n)* nagyobb is, akkor ugyan *s(n)*-ből *n* nehezen határozható meg, de véges eshetőség esetén a lehetséges *n*-ek végigpróbálásával *s(n)* már kitalálható. Ha az elküldött üzenet [*s(n)*] hosszú (pl. 50 jegyű) és a valódi üzenet az elküldöttnek csak egy része, akkor az elküldött *s(n)*-ből annak egy részét megfejteni már nem lehet.

(2) Torzított üzenet: talpra B1-ről E4-re magyar.

(3) A torzított üzenet ASCII-kóddal kódolt alakja:

11 697 108 112 114 973 266 491 142 451 086 952 114 101 321 099 710 312 197 114

(4) A fenti szám *s(n)*-jének értéke:

s(n) = 11 796 893 749 241 036 845 717 932 775 178 816 228 370 307 360 535 662 842 886

Ez a számsor a „borítékolt” üzenet, ezt fogjuk elküldeni ellenfelünknek. A játék folytatásakor elküldjük az eredeti üzenetet (ill. a hozzá tartozó *n*-t). Ezután ellenfelünk könnyen ellenőrizheti, hogy ehhez az *n*-hez valóban az előzőleg elküldött *s(n)* tartozik-e (ezért mi időközben nem tudtunk változtatni az üzeneten). Az *n* számból az üzenet visszafejthető, hiszen csak az ASCII-kódot kell megfejtenie.

A titkosítás során felmerülhet néhány probléma. A legfontosabb közülük, hogy elméletileg több *n*-hez is tartozhat ugyanaz az *s(n)*, így egy *s(n)* szám több üzenetet is kódolhat. Ebből következően a titkosítást végző előre kigondolhat olyan, különféle torzításokat, amelyekhez tartozó *n* (ASCII-kóddal kódolt alak) számoknak ugyanaz az *s(n)*-je. Így a játék folytatásakor megvan annak a lehetősége, hogy több lépés közül is választhasson.

Kezdetben véletlenszerű betűkombinációkkal torzítottunk. Mondjuk így:

x57sD A2-ről B3-ra xUtq.

Azonban lehet, hogy létezik egy másik, véletlenszerű betűkombináció, amely által torzított üzenet ASCII-kóddal kódolt alakjának ugyanaz az *s(n)*-je. A probléma kiküszöbölésének érdekében határoztuk meg, hogy a sakklépést egy klasszikus irodalmi idézetbe ágyazzuk. Annak az esélye, hogy két, verssorral bővített sakklépéshez ugyanaz az *s(n)* tartozik, már gyakorlatilag nulla.

Egy másik lehetséges probléma, hogy a módosított üzenethez tartozó (*n* számhoz) kicsi *s(n)* tartozik. (Ez akár 1 is lehet, ha *n* prím.) Ezen könnyen segíthetünk úgy, hogy módosítunk az üzenet torzításán. Lehet, hogy csak annyi is elég, hogy ugyanabba az idézetbe máshova tesszük a valódi üzenetet. De lehet más idézetet is választani.

A következő probléma lehet, hogy az üzenetünk túl hosszú, sokáig tart a hozzá tartozó *n* számból *s(n)* meghatározása. Erre megoldás lehet, hogy az ASCII-kód helyett más kódolással állítunk elő *n* számot az üzenetből. Erre jó esély van, mert az ASCII-kód sok olyan karaktert is használ, amelyekre üzeneteinknél általában nincs szükség. Ettől függetlenül ez a titkosítási módszer csak rövid üzenetek titkosítására alkalmas, egy hosszú levelet ezzel a módszerrel nem tudunk titkosítani. Annak ellenére, hogy nemcsak a megfejtés, hanem a titkosítás is exponenciális időtartamú, mégis igen hatékony ez a módszer a fentebb vázolt típusú titkosításoknál azért, mert a visszafejtés jelenlegi ismereteink szerint más eddigi módszereknél is lényegesen nehezebb, illetve azért is, mert az üzenet egészen kicsi (akár egyetlen betűnyi) változtatása is az elküldött *s(n)*-t alapvetően megváltoztatja.

A 2008/2009-es tanévben LÉ és EJ a TUDOK-on bemutatott prezentációjában már csak kisebb szerepet szánt az *s(n)* függvénnyel kapcsolatos érdekességeknek, és elsősorban a titkosítási eljárás bemutatásra koncentráltak. Ezt a zsűri értékelte is, és az országos konferencián első díjat nyertek. (Sajnos a kutatásban részt vevő négy diák közül csak kettőt lehetett nevezni erre a bemutatóra.)

Az elmúlt tanévben két újabb, minden eddiginél jobban felkészült tanulóval folytattuk a kutatást. TB és NB, 12. osztályos tanulók igen nagy tájékozottsággal dolgoztak a már kitalált rendszer elemzésén, más módszerekkel való összehasonlításán, a hiányosságok kiküszöbölésén. Mindketten kiválóan tudnak angolul, nagyon sok mindennek utánanéztek. Előadókészségük és NB kriptográfiai jártassága messze meghaladta a középiskolás szintet. Így nem véletlen, hogy ők is első díjat kaptak, sőt a zsűri olyan érdekesnek találta a témát, hogy meghívást kaptak az egyetemisták tudományos diákköri konferenciájának következő évi döntőjére. A kifejlesztett titkosítási eljárással pályáztak a középiskolások tudományos esszépályázatán, és ott is első díjat, míg a középiskolások innovációs pályázatán dicséretet kaptak.

A következő, 2010/2011-es tanévben még látunk további kutatásra váró feladatokat. ÉP és KG 12.-es tanulókkal elsősorban egy, a korábbinál rövidebb *n* számot előállító új kódoláson dolgozunk, hogy ezzel hosszabb szövegek titkosítására is alkalmas legyen a módszerünk. Néhány elmélet meggondolását is érdemes továbbelemezni, de valószínűnek látszik, hogy inkább a gyakorlati hasznosításon érdemes gondolkodni. Pl. Hogyan lehetne a módszerrel úgy kötni határidős ügyleteket, hogy azok a megkötés idejében még ne legyenek nyilvánosak, ezért a borítékbontás előtt ne befolyásolják a folyamatokat, de azért ezeket közben ne lehessen módosítani? Egy másik alkalmazási terület lehet olyan szavazások elektronikus lebonyolítása, amelyeknél csak később szabad megismerni a korábban leadott szavazatot. (Pl. a külföldön szavazóknál.)

A kutatómunka indulásakor még meglevő aggályaim a kutatás kiteljesedése alatt lényegesen csökkentek. Úgy látom, hogy van realitása, értelme középiskolásokkal kutatómunkát folytatni. (Azt azért továbbra is vallom, hogy a középiskolás kutatómunka csak ott lehet hatékony, ahol a hagyományos tehetséggondozási formák is magas színvonalon működnek.)

Az első lépéseket, tehát azt, hogy segítsük tanítványainkat elmélyülni egy-egy témakörben, feltétlenül ajánlom. Aztán ha szerencsésen egymásra talál téma és diák, akkor tovább lehet haladni a valódi kutatómunka irányába. Ekkor viszont érdemes a témában jártas egyetemi oktató vagy kutató segítségét is igénybe venni.

Korábban végzett, igen tehetséges tanítványaimnál többször láttam, hogy bár alkalmasak lettek volna kutatómunkára, mégis inkább a jobb anyagi lehetőségeket biztosító, de kevésbé kreatív munkakört választották. Azt hiszem, többen választják majd a kutatói munkát azok közül, akik már középiskolás korban belekóstoltak a kutatómunkába, megtapasztalták annak örömét, hogy többhavi munka után megtaláljuk a választ valamilyen kérdésre.

Dr. KS mentortanár

Utóirat:

ÉP és KG 2012-ben az ISES nemzetközi innovációs olimpián az amerikai Pittsburgh-ben 4. díjat kaptak.

A nemzetközi siker elismeréseként 2012 augusztusában a két tanulót és a felkészítő tanárt, valamint az ebben az évben Ábel-díjat kapott SzE-t és mindkettőjük feleségét fogadta a köztársasági elnök a Sándor-palotában.